Шуликовская В. В.

Исследование операций. Целочисленное линейное программирование

студентам направления
«Бизнес-информатика»

Ижевск
2015

ББК 22.183.43р30
УДК 518.5 (075.5)

Рецензент старший преподаватель кафедры Вычислительной математики УдГУ П. М. Князев

© В. В. Шуликовская

В данном методическом пособии рассматриваются различные методы решения целочисленных задач линейного программирования. В пособии приведены примеры решения задач, а также вопросы и задания для самостоятельной работы. Пособие адресовано бакалаврам направления «Бизнес-информатика».

Введение

При решении многих экономических задач приходится рассматривать величины, которые в силу своего экономического содержания могут принимать только целые значения (количество человек, работающих на предприятии, выпуск продукции, которая оценивается поштучно и т. д.). Соответствующие математические модели принято называть *моделями дискретного программирования*. Среди всех таких моделей особое место занимают *целочисленная задача линейного программирования (ЦЗЛП)*:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max,$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m, \\ x_1 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_n \geqslant 0,\ x_1 \in \mathbb{Z},\ \ldots,\ x_n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

и *целочисленная каноническая задача линейного программирования* (ЦКЗЛП):

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max,$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_1 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_n \geqslant 0,\ x_1 \in \mathbb{Z},\ \ldots,\ x_n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Если обозначить $A = (a_{ij})$ — матрицу размерности $m \times n$, а векторы $c = (c_1,\ \ldots,\ c_n)$, $x = (x_1,\ \ldots,\ x_n)^T$, $b = (b_1,\ \ldots,\ b_m)^T$, то эти задачи можно записать более кратко:

$$\begin{aligned} &f(x) = cx \to \max \\ &\begin{cases} Ax \leqslant b \\ x \geqslant 0,\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned} \qquad \text{и} \qquad \begin{aligned} &f(x) = cx \to \max \\ &\begin{cases} Ax = b \\ x \geqslant 0,\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

соответственно. Множество векторов $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих всем ограничениям задачи, будем называть *областью допустимых решений* и обозначать D.[1]

Может показаться, что при решении подобной задачи достаточно сначала найти оптимальный план x^* ее непрерывного аналога (то есть

[1]Иногда векторы $x \in \mathbb{R}^n$ называются *планами* задачи, а область D — *областью допустимых планов*.

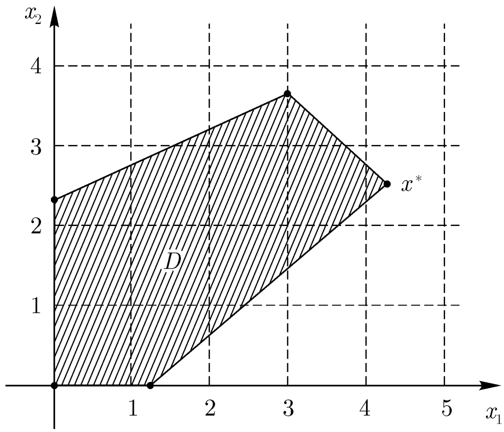

Рис. 1

снять условие $x \in \mathbb{Z}$), а затем искать ответ среди целочисленных векторов x, ближайших к x^*. Однако, как показывает пример, изображенный на рис. 1, этот способ далеко не всегда приводит нас к правильному ответу. Действительно, ни одна из четырех точек (4;2), (4;3), (5;2) и (5;3), ближайших к x^*, не принадлежит области D. Конечно, легко догадаться, что в задаче, изображенной на рисунке, следует рассмотреть точки с координатами (3;2) и (3;3), но если мы столкнемся с многомерной задачей, уже не допускающей геометрического представления, то выбор «ближайших» точек и их проверка на оптимальность будут связаны с громоздкими и зачастую ненужными вычислениями. Кроме того, целевая функция $f(x)$ может вести себя так, что ее значение на найденной «ближайшей» точке будет намного меньше, чем на настоящем оптимальном плане целочисленной задачи. А если $f(x)$ достигает максимума не на одной, а на нескольких точках из множества D, то, округляя x^*, мы найдем только одно из нескольких возможных решений.

Таким образом, целочисленные задачи линейного программирования требуют применения специальных методов решения. Мы познакомимся с двумя наиболее известными из них: *методом Гомори* и *методом ветвей и границ*.

Вопросы и задания.

1. Приведите примеры экономических величин, которые могут принимать только целые значения.

2. Приведите примеры моделей, сводящихся к ЦЗЛП или ЦКЗЛП.

3. Относятся ли данные задачи к типу ЦЗЛП или ЦКЗЛП? Почему?

а) $x_1^2 - x_2^2 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 \leqslant 0 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z},\ x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

б) $x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2^2 \leqslant -4 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

в) $x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 1 \\ x_1 - x_2 \leqslant 0 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z},\ x_2 \in \mathbb{Z},\ x_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

г) $x_1 \to \min$

$$\begin{cases} 4x_2 + x_3 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0,\ x_1 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

4. Пусть функция $f(x)$ задана графически (см. рис. 2). В каких точках $f(x)$ достигает наибольшего значения, если

а) $x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right]$,

б) $x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right] \cap \mathbb{Z}$?

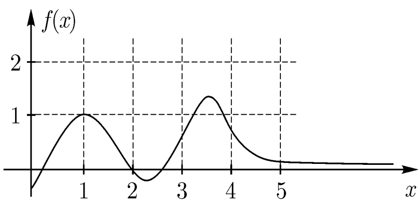

Рис. 2

Возможна ли такая ситуация, если $f(x)$ имеет вид $f(x) = ax + b$? $f(x) = ax^2 + bx + c$?

5. Перечислить все точки пространства $\mathbb{R}^3$ с целыми координатами, «ближайшие» к точке $x = (1\frac{1}{5}; 3\frac{2}{5}; 2\frac{1}{4})$.

6. Записать данные задачи в виде КЗЛП, затем — ЦКЗЛП.

а) $x_1 - x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leqslant 5 \\ 2x_1 - x_2 \geqslant 3 \\ x_1 \geqslant 0 \end{cases}$$

б) $3x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geqslant -4 \\ 2x_2 + x_1 = 2 \\ x_2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. Какие точки с целыми координатами имеет смысл проверять на оптимальность, если область допустимых решений D в ЗЛП имеет вид, изображенный на рис. 3? (Оптимальный план ЗЛП обозначен x^*.)

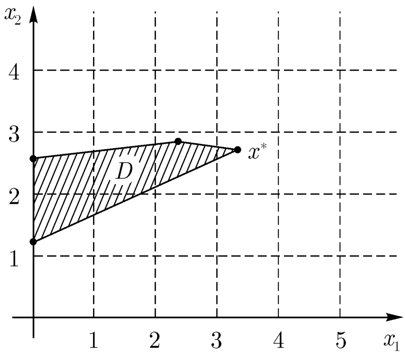

Рис. 3

8. Можно ли записать данную задачу в виде ЦКЗЛП, вводя дополнительные (вспомогательные) переменные?

$$2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 3,5 \\ x_1 - 4x_2 \leqslant 1,25 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z},\ x_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

9. В каких случаях возможно, вводя новые переменные, перейти от ЦЗЛП к ЦКЗЛП?

10. Могут ли в ЦЗЛП матрица A и векторы b и c иметь нецелые компоненты? В ЦКЗЛП?

11. Можно ли утверждать, что при решении этой задачи переменная x_2 непременно примет целое значение?

$$1,25x_1 - 0,65x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + 4x_2 \leqslant 7 \\ 4x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_1 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

12. Записать данную задачу в виде ЦЗЛП:

$$\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 7 \\ 2x_1 - x_2 \leqslant 5 \\ x_1 = \dfrac{k}{2},\ x_2 = \dfrac{n}{2} \\ k,\, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

13. Как известно, многие численные методы позволяют найти решение приближенно, с точностью до наперед заданного (сколь угодно малого) ε. Как в таком случае можно проверить решение на целочисленность?

Метод Гомори

Данный метод предназначен для решения ЦКЗЛП и требует предварительного решения ее непрерывного аналога, то есть задачи, в которой снято требование целочисленности. Если найденный оптимальный план x^* содержит только целые компоненты, то мы автоматически получаем решение ЦКЗЛП. Иначе к системе ограничений задачи добавляется еще одно, дополнительное ограничение с таким расчетом, чтобы:

1) найденный оптимальный план x^* не удовлетворял новому ограничению,

2) все допустимые целочисленные планы исходной задачи этому ограничению удовлетворяли.

Такое ограничение называется *правильным отсечением*, а сам метод Гомори часто называют *методом отсекающих плоскостей.*

На рис. 4 прямые I и II будут правильными отсечениями, а прямые III и IV — нет. Кроме того, легко понять, что прямая I «лучше», чем прямая II, так как прямая I отсекает бо́льшую часть области D. Вообще, прямая I — лучшее из возможных правильных отсечений с данным угловым коэффициентом. Если же нам известно, как проходит линия уровня целевой функции $f(x)$, то мы сможем решить, в каком направлении (с каким угловым коэффициентом) следует проводить правильные отсечения, чтобы как можно быстрее получить целочисленное решение задачи.

Итак, проведя правильное отсечение, мы находим новую область допустимых решений D_1 и решаем новую КЗЛП (по-прежнему сняв условие целочисленности). Если все компоненты нового оптимального

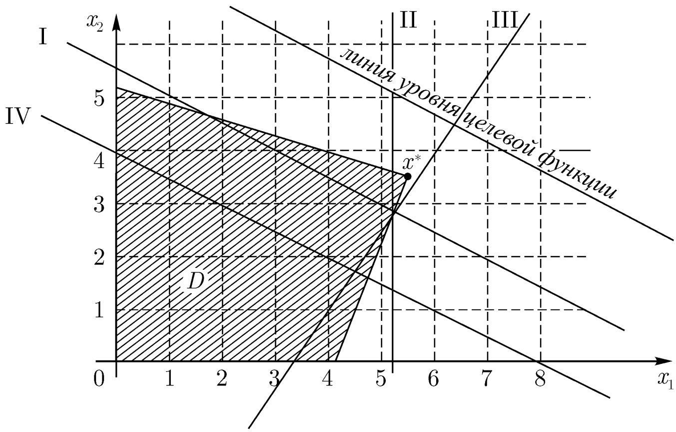

Рис. 4

плана x_1^* целые, то задача решена. В противном случае процесс повторяется.

Теперь следует решить, каким образом выбирать правильные отсечения в многомерных задачах, не допускающих графической интерпретации. С этой целью рассмотрим следующий пример:

$$f(x) = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_1 \in \mathbb{Z},\ x_2 \in \mathbb{Z},\ x_3 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Решим непрерывный аналог исходной задачи с помощью симплекс-метода. Последняя симплекс-таблица имеет вид:

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|ccc|} \cline{2-5} \multicolumn{1}{c|}{} & 10 & 0 & 0 & 3 \\ \hline 1 & \frac{11}{5} & 1 & 0 & \frac{6}{5} \\ 2 & \frac{17}{5} & 0 & 1 & \frac{7}{5} \\ \hline \end{array}$$

В строке оценок (0,0,3) нет отрицательных чисел, следовательно, базис x_1, x_2 (в первом столбце стоят числа 1 и 2) является оптимальным. Соответствующий план $x^* = (\frac{11}{5}, \frac{17}{5}, 0)$, значение функции $f(x) = 10$. Как видим, найденный план не является целочисленным.

Рассмотрим в таблице T_1 строку $\left(\frac{11}{5},\, 1,\, 0,\, \frac{6}{5}\right)$, соответствующую нецелой координате x_1. Первое из уравнений нашей задачи в базисе x_1, x_2 имеет вид:

$$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \frac{6}{5} \cdot x_3 = \frac{11}{5}.$$

Теперь представим $\frac{6}{5}$ и $\frac{11}{5}$ в виде

$$\left[\frac{6}{5}\right] + \left\{\frac{6}{5}\right\} \quad \text{и} \quad \left[\frac{11}{5}\right] + \left\{\frac{11}{5}\right\}$$

соответственно, где $[\alpha]$ и $\{\alpha\}$ обозначают целую и дробную часть числа α, причем

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}, \qquad \{\alpha\} \in [0;1).$$

Получаем уравнение

$$x_1 + \left[\frac{6}{5}\right]x_3 + \left\{\frac{6}{5}\right\}x_3 = \left[\frac{11}{5}\right] + \left\{\frac{11}{5}\right\}$$

или

$$x_1 + \left[\frac{6}{5}\right]x_3 - \left[\frac{11}{5}\right] = -\left\{\frac{6}{5}\right\}x_3 + \left\{\frac{11}{5}\right\}. \tag{1}$$

Теперь рассмотрим неравенство

$$-\left\{\frac{6}{5}\right\}x_3 + \left\{\frac{11}{5}\right\} \leqslant 0. \tag{2}$$

Очевидно, что базисный план x^* этому неравенству не удовлетворяет: небазисная переменная x_3 равна нулю, а $\frac{11}{5}$ — число нецелое, так что $\left\{\frac{11}{5}\right\} > 0$.

С другой стороны, если $x = (x_1,\, x_2,\, x_3)$ содержит только целые компоненты, то в левой части (1) стоит целое число, поэтому и $-\left\{\frac{6}{5}\right\}x_3 + \left\{\frac{11}{5}\right\}$ — число целое. Допустим, оно строго положительно. Учитывая, что $\left\{\frac{11}{5}\right\} < 1$, а $\left\{\frac{6}{5}\right\}x_3 \geqslant 0$, видим, что

$$0 < -\left\{\frac{6}{5}\right\}x_3 + \left\{\frac{11}{5}\right\} < 1.$$

Но на интервале (0;1) нет целых чисел, так что для любого целочисленного плана выполняется противоположное неравенство, то есть неравенство (2).

Таким образом, ограничение

$$-\left\{\frac{6}{5}\right\}x_3 \leqslant -\left\{\frac{11}{5}\right\}$$

образует правильное отсечение. Для перехода к канонической задаче добавляем вспомогательную переменную x_4:

$$-\left\{\frac{6}{5}\right\}x_3 + x_4 = -\left\{\frac{11}{5}\right\}, \qquad x_4 \geqslant 0$$

или

$$-\frac{1}{5}x_3 + x_4 = -\frac{1}{5}, \qquad x_4 \geqslant 0.$$

Поскольку в новой задаче имеется три ограничения, нам нужна еще одна, третья, базисная переменная. В качестве этой переменной возьмем x_4. Поскольку дополнительное ограничение не содержит «старых» базисных переменных, его можно попросту дописать к уже имеющейся симплекс-таблице T_1. Мы получим таблицу $T_2^{(1)}$:

$$T_2^{(1)} = \begin{array}{|c|c|cccc|}
\cline{2-6}
\multicolumn{1}{c|}{} & 10 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
\hline
1 & \frac{11}{5} & 1 & 0 & \frac{6}{5} & 0 \\
2 & \frac{17}{5} & 0 & 1 & \frac{7}{5} & 0 \\
4 & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 1 \\
\hline
\end{array}$$

План $x = \left(\frac{11}{5}, \frac{17}{5}, 0, -\frac{1}{5}\right)$ недопустим, так как $-\frac{1}{5} < 0$, зато строка оценок $(0, 0, 3, 0)$ не содержит отрицательных чисел. Это означает, что нашу задачу можно решить двойственным симплекс методом. Переходя к базису x_1, x_2, x_3, получаем таблицу:

$$T_2^{(2)} = \begin{array}{|c|c|cccc|}
\cline{2-6}
\multicolumn{1}{c|}{} & 7 & 0 & 0 & 0 & 15 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\
2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 7 \\
3 & 1 & 0 & 0 & 1 & -5 \\
\hline
\end{array}$$

Поскольку в столбце $(1,\ 2,\ 1)^T$ нет отрицательных чисел, план $x = (1,\ 2,\ 1,\ 0)$ оптимален. Кроме того, он целочисленный. Таким образом, решение исходной задачи $x^* = (1,\ 2,\ 1)$, $f(x^*) = 7$ (отметим, что значение целевой функции уменьшилось).

Пусть теперь в общем случае последняя симплекс-таблица, найденная при решении КЗЛП, имеет вид (для наглядности мы предположим, что переменные, входящие в базис, стоят на первых местах):

$$T = \begin{array}{|c|c|ccccccc|}
\cline{2-9}
\multicolumn{1}{c|}{} & \widehat{\alpha}_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{0,m+1} & \ldots & \alpha_{0,n} \\
\hline
N_1 & \widehat{\alpha}_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{1,m+1} & \ldots & \alpha_{1,n} \\
N_2 & \widehat{\alpha}_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 & \alpha_{2,m+1} & \ldots & \alpha_{2,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
N_m & \widehat{\alpha}_m & 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha_{m,m+1} & \ldots & \alpha_{m,n} \\
\hline
\end{array}$$

Пусть $\widehat{\alpha}_i$ — первая по счету нецелая компонента оптимального плана

$$x^* = (\widehat{\alpha}_1,\, \widehat{\alpha}_2,\, \ldots,\, \widehat{\alpha}_m,\, 0,\, \ldots,\, 0).$$

Тогда i-ое уравнение в системе ограничений задачи имеет вид:

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \widehat{\alpha}_i.$$

Если

$$\begin{gathered} \alpha_{ij} = [\alpha_{ij}] + \{\alpha_{ij}\}, \\ \widehat{\alpha}_i = [\widehat{\alpha}_i] + \{\widehat{\alpha}_i\}, \end{gathered}$$

то наше уравнение можно переписать в виде

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} [\alpha_{ij}] x_j - [\widehat{\alpha}_i] = - \sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\} x_j + \{\widehat{\alpha}_i\}. \tag{3}$$

Теперь рассмотрим неравенство

$$- \sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\} x_j + \{\widehat{\alpha}_i\} \leqslant 0. \tag{4}$$

Оптимальный план x^* ему не удовлетворяет, так как у него

$$x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0,$$

а $\{\widehat{\alpha}_i\} > 0$, потому что $\widehat{\alpha}_i$ — число нецелое. Напротив, если $x = (x_1,\, x_2,,\, \ldots,\, x_n)$ имеет только целые компоненты, то в силу (3) левая часть неравенства (4) — число целое. Но $\{\widehat{\alpha}_i\} < 1$, $\{\alpha_{ij}\}x_j \geqslant 0$ для всех $j = m+1, \ldots, n$, так что

$$-\sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\}x_j + \{\widehat{\alpha}_i\} < 1,$$

то есть

$$-\sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\}x_j + \{\widehat{\alpha}_i\} \leqslant 0,$$

поскольку 0 — наибольшее целое число, которое меньше, чем 1.

Итак, ограничение (4) — это правильное отсечение. Вводим вспомогательную переменную x_{n+1}:

$$-\sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\}x_j + x_{n+1} = -\{\widehat{\alpha}_i\}, \qquad x_{n+1} \geqslant 0$$

и получаем новую симплекс-таблицу

$$T' = \begin{array}{|c|c|ccccccc|}
\cline{2-9}
\multicolumn{1}{c|}{} & \widehat{\alpha}_0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{0,m+1} & \ldots & \alpha_{0,n} & 0 \\
\hline
N_1 & \widehat{\alpha}_1 & 1 & \ldots & 0 & \alpha_{1,m+1} & \ldots & \alpha_{1,n} & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
N_m & \widehat{\alpha}_m & 0 & \ldots & 1 & \alpha_{m,m+1} & \ldots & \alpha_{m,n} & 0 \\
N_{m+1} & -\{\widehat{\alpha}_i\} & 0 & \ldots & 0 & -\{\alpha_{i,m+1}\} & \ldots & -\{\alpha_{i,n}\} & 1 \\
\hline
\end{array}$$

Как и раньше, соответствующую задачу можно решить двойственным симплекс-методом.

Итак, чтобы получить правильное отсечение, надо рассмотреть неравенство

$$-\sum \{\alpha_{ij}\}x_j \leqslant -\{\widehat{\alpha}_i\},$$

где i — номер первой нецелой компоненты оптимального плана, α_{ij} и $\widehat{\alpha}_i$ — числа, стоящие в i-ой строке симплекс-таблицы, а суммирование ведется по тем переменным x_j, которые не вошли в базис.

Рассмотрим еще два примера решения задач.

Пример 1.

$$18x_1 + 49x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ 4x_1 + 11x_2 \leqslant 44 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \\ x_1 \in \mathbb{Z},\ x_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Откажемся от условия целочисленности и перейдем к канонической задаче:

$$18x_1 + 49x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 4x_1 + 11x_2 + x_4 = 44 \\ x_i \geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \end{cases}$$

Если принять в качестве базисных вспомогательные переменные x_3 и x_4, то первую симплекс-таблицу можно записать в виде

$$T_1^{(1)} = \begin{array}{|c|c|cccc|} \hline & 0 & -18 & -49 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 6 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 44 & 4 & 11 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

План $x = (0, 0, 6, 44)$ не оптимален, поскольку в строке оценок $(-18, -49, 0, 0)$ есть два отрицательных числа. Вводим в базис переменную x_2, поскольку ей соответствует меньшее отрицательное число -49. Чтобы определить, какую переменную следует выводить из базиса, рассмотрим отношения $\frac{6}{1}$ и $\frac{44}{11}$. (Числа из нулевого столбца делятся на числа из столбца, соответствующего переменной x_2.) Меньшее из них, $\frac{44}{11}$, стоит в строке, соответствующей x_4. Выводим эту переменную из базиса. Теперь нам надо сосчитать коэффициенты новой симплекс-таблицы с таким расчетом, чтобы в столбцах x_2 и x_3 (новый базис) стояли элементы единичной матрицы. Сначала делим строку x_4 на 11 (чтобы получить 1 на месте элемента 11, который называется *ведущим*), затем вычитаем эту строку из двух других так, чтобы получить нули в столбце x_2 (заметим, что столбец x_3 при этом не изменится):

$$\begin{pmatrix} 0 & -18 & -49 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 44 & 4 & \underline{\mathbf{11}} & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -18 & -49 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & \frac{4}{11} & \underline{\mathbf{1}} & 0 & \frac{1}{11} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 196 & -\frac{2}{11} & 0 & 0 & \frac{49}{11} \\ 2 & \frac{7}{11} & 0 & 1 & -\frac{1}{11} \\ 4 & \frac{4}{11} & \underline{\mathbf{1}} & 0 & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$$

Новая симплекс-таблица имеет вид:

$$T_1^{(2)} = \begin{array}{|c|c|cccc|}
\cline{2-6}
\multicolumn{1}{c|}{} & 196 & -\frac{2}{11} & 0 & 0 & \frac{49}{11} \\
\hline
3 & 2 & \frac{7}{11} & 0 & 1 & -\frac{1}{11} \\
2 & 4 & \frac{4}{11} & 1 & 0 & \frac{1}{11} \\
\hline
\end{array}$$

План $x = (0, 4, 2, 0)$ не оптимален $(-\frac{2}{11} < 0)$. Вводим в базис x_1, выводим x_3 $\left(2 : \frac{7}{11} < 4 : \frac{4}{11}\right)$. Ведущий элемент равен $\frac{7}{11}$.

$$\begin{pmatrix} 196 & -\frac{2}{11} & 0 & 0 & \frac{49}{11} \\ 2 & \boldsymbol{\frac{7}{11}} & 0 & 1 & -\frac{1}{11} \\ 4 & \frac{4}{11} & 1 & 0 & \frac{1}{11} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 196 & -\frac{2}{11} & 0 & 0 & \frac{49}{11} \\ \frac{22}{7} & \underline{\mathbf{1}} & 0 & \frac{11}{7} & -\frac{1}{7} \\ 4 & \frac{4}{11} & 1 & 0 & \frac{1}{11} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \frac{1376}{7} & 0 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{31}{7} \\ \frac{22}{7} & \underline{\mathbf{1}} & 0 & \frac{11}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{20}{7} & 0 & 1 & -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Таким образом,

$$T_1^{(3)} = \begin{array}{|c|c|cccc|}
\cline{2-6}
\multicolumn{1}{c|}{} & \frac{1376}{7} & 0 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{31}{7} \\
\hline
1 & \frac{22}{7} & 1 & 0 & \frac{11}{7} & -\frac{1}{7} \\
2 & \frac{20}{7} & 0 & 1 & -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\
\hline
\end{array}$$

Найденный план $x = \left(\frac{22}{7}, \frac{20}{7}, 0, 0\right)$ — оптимальный, но не целочисленный. Первая по счету нецелая компонента $x_1 = \frac{22}{7}$. Нам надо будет добавить ограничение

$$-\left\{\frac{11}{7}\right\}x_3 - \left\{-\frac{1}{7}\right\}x_4 \leqslant -\left\{\frac{22}{7}\right\},$$

то есть

$$-\frac{4}{7}x_3 - \frac{6}{7}x_4 \leqslant -\frac{1}{7}.$$

Заметим, что если вспомнить про уравнения

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 4x_1 + 11x_2 + x_4 = 44, \end{cases}$$

то, выражая x_3 и x_4 через x_1 и x_2 и умножая все на 7, приходим к неравенству $4x_1 + 10x_2 \leqslant 41$. Ему соответствует правильное отсечение, изображенное на рис. 5.

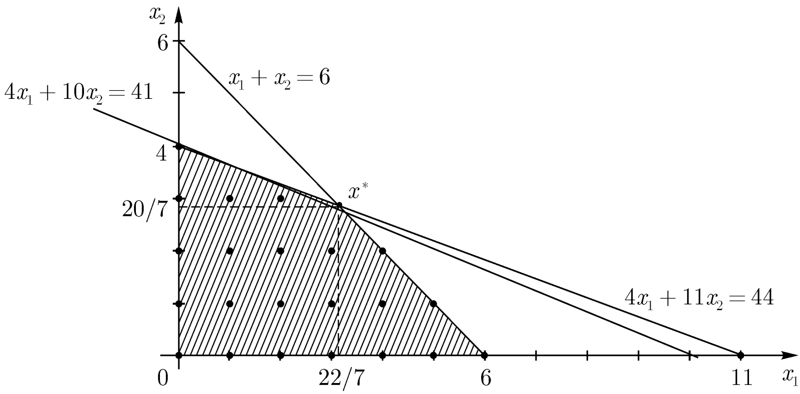

Рис. 5

Как видим, это далеко не лучшее из возможных отсечений: эту прямую можно было бы «сдвинуть» влево и вниз, слегка развернув, чтобы она прошла через точки (0;4) (2;3) и (4;2).

Теперь введем еще одну вспомогательную переменную x_5 и получаем ограничение типа равенства:

$$-\frac{4}{7}x_3 - \frac{6}{7}x_4 + x_5 = -\frac{1}{7}, \qquad x_5 \geqslant 0.$$

Добавляя x_5 к множеству базисных переменных, составляем новую симплекс-таблицу:

$T_2^{(1)} =$

	$\frac{1376}{7}$	0	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{31}{7}$	0
1	$\frac{22}{7}$	1	0	$\frac{11}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0
2	$\frac{20}{7}$	0	1	$-\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	0
5	$-\frac{1}{7}$	0	0	$-\frac{4}{7}$	$-\frac{6}{7}$	1

Воспользуемся двойственным симплекс-методом. Нам надо вывести из базиса x_5 (поскольку в столбце $\left(\frac{22}{7}, \frac{20}{7}, -\frac{1}{7}\right)^T$ именно этой переменной соответствует отрицательное число). Чтобы определить, какую из переменных надо ввести в базис, рассмотрим отношения $\frac{2}{7} : \frac{4}{7}$ и $\frac{31}{7} : \frac{6}{7}$ (числа, стоящие в нулевой строке оценок, делятся на модули отрицательных чисел из строки x_5). Меньшее число соответствует переменной x_3. Ее и следует ввести в базис. Как и ранее, пересчитываем коэффициенты симплекс-таблицы с таким расчетом, чтобы на месте ведущего элемента, то есть $-\frac{4}{7}$, оказалась 1, а все остальные числа в столбце x_3 обратились в нуль. Получаем новую симплекс-таблицу:

$$T_2^{(2)} = \begin{array}{|c|c|ccccc|}
\hline
 & \frac{393}{2} & 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{1}{2} \\
\hline
1 & \frac{11}{4} & 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{11}{4} \\
2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\
3 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} \\
\hline
\end{array}$$

План $x = \left(\frac{11}{4}, 3, \frac{1}{4}, 0, 0\right)$ — оптимальный, но не целочисленный. Поскольку $x_1 \notin \mathbb{Z}$, рассматриваем первую строку таблицы $T_2^{(2)}$ и получаем ограничение

$$-\left\{-\frac{5}{2}\right\}x_4 - \left\{\frac{11}{4}\right\}x_5 \leqslant -\left\{\frac{11}{4}\right\},$$

то есть

$$-\frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{4}x_5 \leqslant -\frac{3}{4}$$

или

$$-\frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{4}x_5 + x_6 = -\frac{3}{4}, \qquad x_6 \geqslant 0.$$

Добавляя к множеству базисных переменных x_6, составляем таблицу:

$$T_3^{(1)} = \begin{array}{|c|c|cccccc|}
\hline
 & \frac{393}{2} & 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{1}{2} & 0 \\
\hline
1 & \frac{11}{4} & 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{11}{4} & 0 \\
2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
3 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & 0 \\
6 & -\frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \\
\hline
\end{array}$$

Выводя из базиса x_6 и вводя x_5, находим следующую таблицу:

$$T_3^{(2)} = \begin{array}{c|c|cccccc|} \cline{2-8} & 196 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{13}{3} & 0 & \frac{11}{3} \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 & -\frac{7}{3} \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{4}{3} \\ \hline \end{array}$$

Найденный план $x = (0, 4, 2, 0, 1, 0)$ — оптимальный и целочисленный. В исходной задаче ему соответствует решение $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ (заметим, что эта точка находится достаточно «далеко» от решения непрерывной задачи, то есть от точки $\left(\frac{22}{7}, \frac{20}{7}\right)$). Тот факт, что вспомогательные переменные x_3 и x_5 отличны от нуля, означает, что связанные с ними ограничения выполняются для x_1 и x_2 как неравенства, а не как равенства. Это не должно нас удивлять, поскольку, строя правильные отсечения, мы неизбежно оказываемся внутри изначальной области D.

Пример 2.

$$2x_1 + x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leqslant 8 \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 7 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \\ x_1 \in \mathbb{Z},\ x_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Отказываемся от условия целочисленности и переходим к канонической задаче:

$$2x_1 + x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 7 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0. \end{cases}$$

Беря x_3 и x_4 в качестве базисных переменных, составляем симплекс-таблицу:

$$T_1^{(1)} = \begin{array}{c|c|cccc|} \cline{2-6} & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 8 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & \mathbf{3} & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Выводя из базиса x_4 и вводя x_1, получаем:

$$T_1^{(2)} = \begin{array}{|c|c|cccc|}
\cline{2-6}
\multicolumn{1}{c|}{} & \frac{14}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\
\hline
3 & \frac{17}{3} & 0 & \frac{8}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\
1 & \frac{7}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\
\hline
\end{array}$$

Выводим из базиса x_3, вводим x_2:

$$T_1^{(3)} = \begin{array}{|c|c|cccc|}
\cline{2-6}
\multicolumn{1}{c|}{} & \frac{43}{8} & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\
\hline
2 & \frac{17}{8} & 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\
1 & \frac{13}{8} & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\
\hline
\end{array}$$

План $x = \left(\frac{13}{8}, \frac{17}{8}\right)$ оптимален. Первая нецелочисленная координата $x_1 = \frac{13}{8}$. Добавляем ограничение

$$-\frac{7}{8}x_3 - \frac{3}{8}x_4 + x_5 = -\frac{5}{8}, \qquad x_5 \geqslant 0.$$

Новая симплекс-таблица:

$$T_2^{(1)} = \begin{array}{|c|c|ccccc|}
\cline{2-7}
\multicolumn{1}{c|}{} & \frac{43}{8} & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & 0 \\
\hline
2 & \frac{17}{8} & 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \\
1 & \frac{13}{8} & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 \\
5 & -\frac{5}{8} & 0 & 0 & -\frac{7}{8} & -\frac{3}{8} & 1 \\
\hline
\end{array}$$

Выводим из базиса переменную x_5, вводим x_3:

$$T_2^{(2)} = \begin{array}{|c|c|ccccc|}
\cline{2-7}
\multicolumn{1}{c|}{} & \frac{37}{7} & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\
\hline
2 & \frac{13}{7} & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\
1 & \frac{12}{7} & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\
3 & \frac{5}{7} & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{7} & -\frac{8}{7} \\
\hline
\end{array}$$

Добавляем ограничение:

$$-\frac{3}{7}x_4 - \frac{6}{7}x_5 + x_6 = -\frac{5}{7}.$$

Следующая симплекс-таблица:

$$T_3^{(1)} = \begin{array}{|c|c|cccccc|}
\cline{2-8}
\multicolumn{1}{c|}{} & \frac{37}{7} & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\
\hline
2 & \frac{13}{7} & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\
1 & \frac{12}{7} & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\
3 & \frac{5}{7} & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{7} & -\frac{8}{7} & 0 \\
6 & -\frac{5}{7} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & 1 \\
\hline
\end{array}$$

Выводим из базиса x_6, вводим x_5:

$$T_3^{(2)} = \begin{array}{|c|c|cccccc|}
\cline{2-8}
\multicolumn{1}{c|}{} & \frac{31}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} \\
\hline
2 & \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
1 & \frac{11}{6} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \\
3 & \frac{5}{3} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\
5 & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{7}{6} \\
\hline
\end{array}$$

Добавляем еще одно ограничение:

$$-\frac{1}{2}x_4 - \frac{5}{6}x_6 + x_7 = -\frac{5}{6}.$$

Получаем таблицу:

$$T_4^{(1)} = \begin{array}{|c|c|ccccccc|}
\cline{2-9}
\multicolumn{1}{c|}{} & \frac{31}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\
\hline
2 & \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
1 & \frac{11}{6} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\
3 & \frac{5}{3} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\
5 & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{7}{6} & 0 \\
7 & -\frac{5}{6} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{6} & 1 \\
\hline
\end{array}$$

Наконец, выводя из базиса x_7 и вводя x_6, получаем:

$$T_4^{(2)} = \begin{array}{|c|c|cccccccc|}
\hline
\multicolumn{1}{c|}{} & 5 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\
\hline
2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{3}{5} \\
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\
3 & 3 & 0 & 0 & 1 & \frac{9}{5} & 0 & 0 & -\frac{8}{5} \\
5 & 2 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5} & 1 & 0 & -\frac{7}{5} \\
6 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 1 & -\frac{6}{5} \\
\hline
\end{array}$$

План $x = (2, 1, 3, 0, 2, 1, 0)$ — оптимальный и целочисленный. В исходной задаче функция достигает наибольшего значения в точке с координатами (2;1).

Вопросы и задания

1. Построить какие-нибудь правильные отсечения для областей, изображенных на рис. 1 и 3. Почему прямые III и IV, изображенные на рис. 4, не являются правильными отсечениями?

2. Верно ли, что при добавлении к задаче правильного отсечения оптимальное значение функции $f(x)$ будет убывать?

3. Каким образом можно обобщить метод Гомори на тот случай, когда требование целочисленности относится лишь к некоторым переменным?

4. а) Решить данные задачи методом Гомори. Построить правильное отсечение, соответствующее первому из дополнительных ограничений.

б) Решить эти же задачи графически. Сравнить ответы.

1) $x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 33 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_1 \in \mathbb{Z},\ x_2 \in \mathbb{Z},\ x_3 \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

2) $3x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 4,5 \\ x_1 \leqslant 3 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_1 \in \mathbb{Z},\ x_2 \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

3) $2x_1 - x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ 3x_1 - x_2 \leqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_1 \in \mathbb{Z},\ x_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

4) $x_1 + x_2 - 2x_3 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 7 \\ 3x_1 + 5x_3 = 8 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_1 \in \mathbb{Z},\ x_2 \in \mathbb{Z},\ x_3 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

5. Попытаться решить задачу

$$x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 12x_2 \leqslant 21 \\ 2x_2 \geqslant 3 \\ x_1 \leqslant 1 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

методом Гомори. Решить эту же задачу графически. Сделать выводы.

Указание. При переходе к КЗЛП

$$x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 12x_2 + x_3 = 21 \\ -2x_2 + x_4 = -3 \\ x_1 + x_5 = 1 \\ x_i \geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \end{cases}$$

базис x_3, x_4, x_5 недопустим, так как при $x_1 = x_2 = 0$ переменная $x_4 = -3 < 0$. Вместе с тем легко заметить, что базис $x_2,\ x_3,\ x_5$ является допустимым, потому что при $x_1 = x_4 = 0$ переменные $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = 3$, $x_5 = 1$. Из второго уравнения следует, что $x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_4$. Подставляя это выражение в целевую функцию и в первое уравнение, получаем задачу

$$x_1 + \frac{1}{2}x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_4 + x_3 = 3 \\ -\frac{1}{2}x_4 + x_2 = \frac{3}{2} \\ x_1 + x_5 = 1 \\ x_i \geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \end{cases}$$

эквивалентную исходной. Теперь, взяв в качестве базисных переменных x_2, x_3 и x_5, мы можем составить первую симплекс-таблицу по тому же правилу, что и раньше.

6. Можно ли утверждать, что, решая задачу методом Гомори, мы за конечное число шагов найдем целочисленное решение? Можно ли это утверждать, если мы решаем задачу на компьютере?

Метод ветвей и границ

Термин «метод ветвей и границ» в действительности обозначает целое семейство методов, применяемых при решении очень разных *дискретных* задач (то есть задач, в которых переменные могут принимать значения из какого-нибудь конечного множества D), как линейных, так и нелинейных.

Изложим основные принципы, объединяющие это семейство методов.

Пусть надо решить задачу:

$$\begin{cases} f(x) \to \max, \\ x \in D, \end{cases}$$

где $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_r\}$ — конечное множество. Обозначаем $D^{(1)} = D$ и каким-то образом оцениваем $f(x)$ на всем множестве $D^{(1)}$:

$$\max_{x \in D} f(x) \leqslant \xi(D^{(1)}) = \xi_1.$$

Если можно найти такое $x^* \in D$, что $f(x^*) = \xi(D^{(1)})$, то искомое решение найдено и равно x^*. Иначе мы каким-то способом разбиваем множество $D^{(1)}$ на подмножества:

$$D^{(1)} = D_1^{(2)} \cup D_2^{(2)} \cup \ldots \cup D_k^{(2)},$$

где $D_i^{(2)} \cap D_j^{(2)} = \varnothing$, $i \neq j$, и оцениваем $f(x)$ на каждом $D_i^{(2)}$:

$$\max_{x \in D_i^{(2)}} f(x) \leqslant \xi(D_i^{(2)}).$$

Оценки становятся более точными, то есть

$$\xi(D_i^{(2)}) \leqslant \xi(D^{(1)}), \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Если теперь мы можем найти такое x^*, что

$$f(x^*) = \xi_2 = \max_{i=1, \ldots, k} \xi(D_i^{(2)}),$$

то x^* — наш оптимальный план. Иначе выбираем наиболее «перспективные» множества $D_i^{(2)}$, то есть множества с наибольшей оценкой $\xi(D_i^{(2)})$ и снова разбиваем их на подмножества. Далее повторяется процесс оценивания множеств и, в случае необходимости, их разбиения.

Теперь посмотрим, как реализуются эти общие идеи при решении ЦЗЛП.

П р и м е р 1. Допустим, нам надо решить задачу

$$2x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leqslant 8 \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 7 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \\ x_1 \in \mathbb{Z},\ x_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Рассмотрим непрерывный аналог данной задачи:

$$2x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leqslant 8 \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 7 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Поскольку у нас всего две переменных, мы можем решить эту задачу графически. Областью допустимых решений будет многоугольник $OABC$ с вершинами $O(0,0)$, $A\left(0, \dfrac{8}{3}\right)$, $B\left(\dfrac{13}{8}, \dfrac{17}{8}\right)$ и $C\left(\dfrac{7}{3}, 0\right)$ (см. рис. 6).

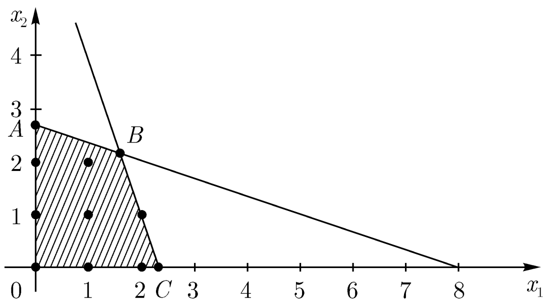

Рис. 6

Целевая функция достигает наибольшего значения в точке B,

$$f(B) = 2 \cdot \frac{13}{8} + \frac{17}{8} = \frac{43}{8}.$$

Множество $D^{(1)}$ состоит из всех точек с целыми координатами, попадающих в четырехугольник $OABC$. (Мы видим, что в действительности множество $D^{(1)}$ содержит 8 элементов.) Понятно, что для всех $x \in D^{(1)}$

$$f(x) \leqslant f(B) = \frac{43}{8},$$

то есть число $\frac{43}{8}$ можно принять за оценку множества $D^{(1)}$: $\xi(D^{(1)}) = \frac{43}{8}$. Мы не можем указать такой план $x \in D^{(1)}$, чтобы $f(x) = \xi(D^{(1)})$, поэтому будем разбивать $D^{(1)}$ на подмножества. Рассмотрим точку $B\left(\frac{13}{8}, \frac{17}{8}\right)$. Для нее $x_1 = \frac{13}{8} \notin \mathbb{Z}$. Вместе с тем $1 < \frac{13}{8} < 2$. Поэтому, разбивая D_1 на подмножества, добавим к имеющейся системе ограничений неравенства $x_1 \leqslant 1$ или $x_1 \geqslant 2$. При этом мы не потеряли ни одной целой точки, хотя из четырехугольника $OABC$ будет удален целый кусок (вместе с оптимальным планом $\left(\frac{13}{8}, \frac{17}{8}\right)$). Множества $D_1^{(2)}$ и $D_2^{(2)}$ определены системами ограничений

$$D_1^{(2)}: \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leqslant 8 \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 7 \\ x_1 \leqslant 1 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z},\ x_2 \in \mathbb{Z}, \end{cases} \qquad D_2^{(2)}: \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leqslant 8 \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 7 \\ x_1 \geqslant 2 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z},\ x_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Мы получаем два непрерывных аналога нашей ЦЗЛП:

$$\begin{gathered} 2x_1 + x_2 \to \max \\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leqslant 8 \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 7 \\ x_1 \leqslant 1,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases} \end{gathered} \quad \text{и} \quad \begin{gathered} 2x_1 + x_2 \to \max \\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leqslant 8 \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 7 \\ x_1 \geqslant 2,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{cases} \end{gathered}$$

Соответствующие области допустимых решений изображены на рис. 7.

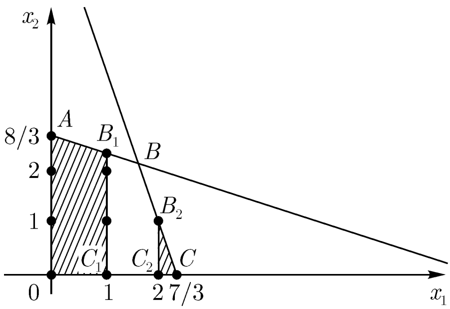

Рис. 7

Ищем наибольшее значение целевой функции на множествах OAB_1C_1 и C_2B_2C.

$$\max_{x \in OAB_1C_1} f(x) = \frac{13}{3} \qquad \text{при} \quad x_1 = 1,\ x_2 = \frac{7}{3} \quad (\text{точка } B_1),$$
$$\max_{x \in C_2B_2C} f(x) = 5 \qquad \text{при} \quad x_1 = 2,\ x_2 = 1 \quad (\text{точка } B_2).$$

Таким образом,

$$\xi(D_1^{(2)}) = \frac{13}{3},$$
$$\xi(D_2^{(2)}) = 5,$$
$$\xi_2 = \max\Big\{\xi(D_1^{(2)}),\, \xi(D_2^{(2)})\Big\} = 5.$$

Мы можем указать целочисленный план $x = (2; 1)$, для которого $f(x) = \xi_2$. Этот план и будет решением нашей задачи.

Пример 2.

$$x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leqslant 27 \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 27 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z},\ x_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Решаем непрерывный аналог нашей задачи (область допустимых планов показана на рис. 8).

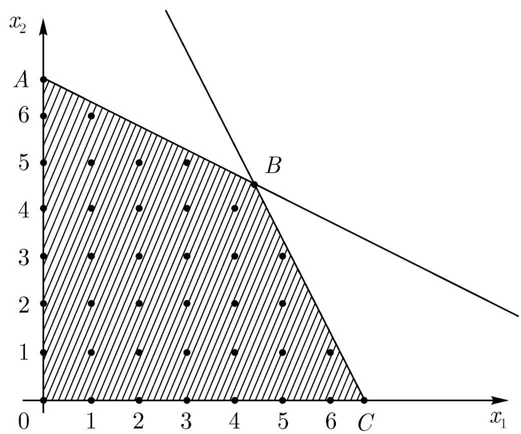

Рис. 8

Здесь $A\left(0, \dfrac{27}{4}\right)$, $B\left(\dfrac{9}{2}, \dfrac{9}{2}\right)$, $C\left(\dfrac{27}{4}, 0\right)$. Целевая функция достигает наибольшего значения в точке B, $f(B) = 9$. Таким образом, $\xi(D^{(1)}) = 9$.

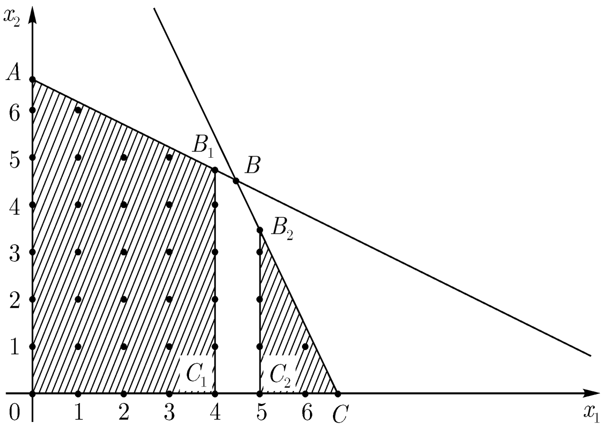

Рис. 9

Поскольку первая координата точки B $x_1 = \dfrac{9}{2} \notin \mathbb{Z}$, разбиваем множество $D^{(1)}$ на два подмножества, добавляя ограничения $x_1 \leqslant 4$ и $x_1 \geqslant 5$ (мы учли, что $x_1 = \dfrac{9}{2} \in (4; 5)$). Итак, у нас возникают два подмножества:

$$D_1^{(2)}: \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leqslant 27 \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 27 \\ x_1 \leqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z},\ x_2 \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad \text{и} \quad D_2^{(2)}: \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leqslant 27 \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 27 \\ x_1 \geqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z},\ x_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

На рис. 9 изображены области допустимых решений, возникающие в непрерывных аналогах нашей задачи. Это многоугольники OAB_1C_1 и C_2B_2C.

Легко видеть, что

$$\max_{x \in OAB_1C_1} f(x) = 8{,}75 \qquad \text{при} \quad x_1 = 4,\ x_2 = 4{,}75 \quad (\text{точка } B_1),$$
$$\max_{x \in C_2B_2C} f(x) = 8{,}5 \qquad \text{при} \quad x_1 = 5,\ x_2 = 3{,}5 \quad (\text{точка } B_2).$$

Таким образом,

$$\xi(D_1^{(2)}) = 8,75,$$

$$\xi(D_2^{(2)}) = 8,5,$$

$$\xi_2 = \max\{8,75;\ 8,5\} = 8,75.$$

Мы не можем указать точку x с целыми координатами, для которой $f(x) = 8,75$, поэтому выберем множество $D_1^{(2)}$ как более «перспективное» $(\xi(D_1^{(2)}) > \xi(D_2^{(2)}))$ и разобьем его на подмножества, добавляя ограничения $x_2 \leqslant 4$ и $x_2 \geqslant 5$ (первая по счету нецелая координата точки B_1 — это $x_2 = 4,75$). Получаем следующий набор множеств:

$$D_1^{(3)}: \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leqslant 27 \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 27 \\ x_1 \leqslant 4,\ x_2 \leqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z},\ x_2 \in \mathbb{Z}, \end{cases} \qquad D_2^{(3)}: \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leqslant 27 \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 27 \\ x_1 \leqslant 4,\ x_2 \geqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z},\ x_2 \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$D_3^{(3)} = D_2^{(2)}.$$

Соответствующие многоугольники на плоскости (для непрерывных задач) изображены на рис. 10. (Для удобства в каждом многоугольнике проставлено то множество, которому он соответствует.)

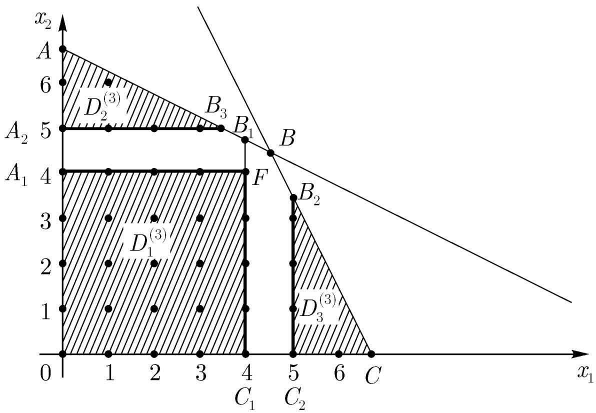

Рис. 10

Находим оценки целевой функции $f(x)$ для каждого из этих множеств:

$$\xi(D_1^{(3)}) = \max_{x\in OA_1FC_1} f(x) = 8 \quad \text{при} \quad x_1 = 4,\ x_2 = 4 \qquad (\text{точка } F),$$

$$\xi(D_2^{(3)}) = \max_{x\in A_2AB_3} f(x) = 8,5 \quad \text{при} \quad x_1 = 3,5,\ x_2 = 5 \qquad (\text{точка } B_3),$$

$$\xi(D_3^{(3)}) = \xi(D_2^{(2)}) = 8,5 \quad \text{при} \quad x_1 = 5,\ x_2 = 3,5 \qquad (\text{точка } B_2).$$

Таким образом, $\xi_3 = \max\{8;\ 8,5;\ 8,5\} = 8,5$.

На этот раз разбиению подвергаются два множества, имеющие максимальные оценки, то есть множества $D_2^{(3)}$ и $D_3^{(3)}$. Разбивая множество $D_2^{(3)}$, мы вводим ограничения $x_1 \leqslant 3$ и $x_1 \geqslant 4$, так как первая нецелая координата точки B_3 $x_1 = 3,5 \in (3;4)$. Разбивая множество $D_3^{(3)}$, вводим ограничения $x_2 \leqslant 3$ и $x_2 \geqslant 4$. Получаем множества:

$$D_1^{(4)} = D_1^{(3)},$$

$$D_2^{(4)}: \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leqslant 27 \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 27 \\ x_1 \leqslant 4,\ x_2 \geqslant 5 \\ x_1 \leqslant 3 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z},\ x_2 \in \mathbb{Z}, \end{cases} \qquad D_3^{(4)}: \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leqslant 27 \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 27 \\ x_1 \leqslant 4,\ x_2 \geqslant 5 \\ x_1 \geqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z},\ x_2 \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$D_4^{(4)}: \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leqslant 27 \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 27 \\ x_1 \geqslant 5,\ x_2 \leqslant 3 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z},\ x_2 \in \mathbb{Z}, \end{cases} \qquad D_5^{(4)}: \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leqslant 27 \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 27 \\ x_1 \geqslant 5,\ x_2 \geqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z},\ x_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Замечаем, что множества $D_3^{(4)}$ и $D_5^{(4)}$ пусты: их системы неравенств несовместны. Многоугольники, соответствующие остальным множествам, показаны на рис. 11.

Находим оценки целевой функции $f(x)$:

$$\xi(D_1^{(4)}) = \xi(D_1^{(3)}) = 8 \qquad \text{в точке} \quad F(4;4),$$

$$\xi(D_2^{(4)}) = \max_{x\in A_2AB_4F_1} f(x) = 8,25 \quad \text{в точке} \quad B_4(3;\ 5,25),$$

$$\xi(D_4^{(4)}) = \max_{x\in C_2CB_5F_2} f(x) = 8,25 \quad \text{в точке} \quad B_5(5,25;\ 3).$$

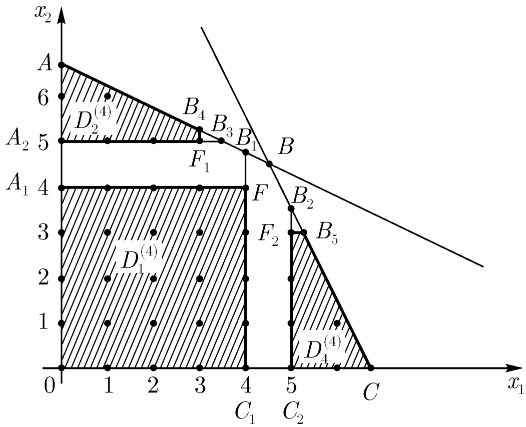

Рис. 11

Таким образом, $\xi_4 = 8,25$ и разбиению опять подвергаются два множества $D_2^{(4)}$ и $D_4^{(4)}$. В первое из них мы добавим ограничения $x_2 \leqslant 5$ и $x_2 \geqslant 6$, во второе: $x_1 \leqslant 5$ и $x_1 \geqslant 6$. Получаем пять множеств:

$$D_1^{(5)} = D_1^{(4)},$$

$$D_2^{(5)}: \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leqslant 27 \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 27 \\ x_1 \leqslant 4,\ x_2 \geqslant 5 \\ x_1 \leqslant 3,\ x_2 \leqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z},\ x_2 \in \mathbb{Z}, \end{cases} \qquad D_3^{(5)}: \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leqslant 27 \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 27 \\ x_1 \leqslant 4,\ x_2 \geqslant 5 \\ x_1 \leqslant 3,\ x_2 \geqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z},\ x_2 \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$D_4^{(5)}: \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leqslant 27 \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 27 \\ x_1 \geqslant 5,\ x_2 \leqslant 3 \\ x_1 \leqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z},\ x_2 \in \mathbb{Z}, \end{cases} \qquad D_5^{(5)}: \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leqslant 27 \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 27 \\ x_1 \geqslant 5,\ x_2 \leqslant 3 \\ x_1 \geqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z},\ x_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Соответствующие им многоугольники изображены на рис. 12. (Множеству $D_2^{(5)}$ соответствует отрезок A_2F_1, множеству $D_4^{(5)}$ — отрезок C_2F_2.)

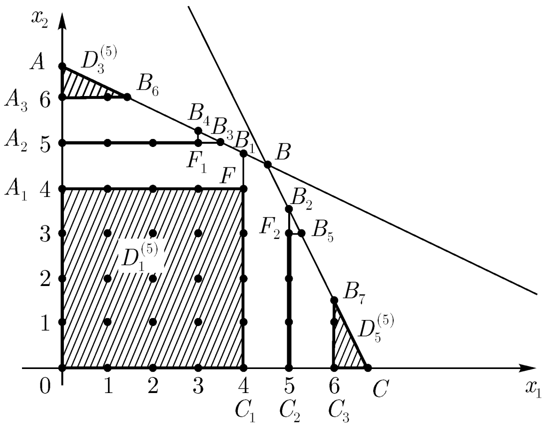

Рис. 12

Находим оценки целевой функции:

$$\xi(D_1^{(5)}) = \xi(D_1^{(4)}) = 8 \qquad \text{в точке } F(4;4),$$

$$\xi(D_2^{(5)}) = \max_{x \in A_2F_1} f(x) = 8 \qquad \text{в точке } F_1(3;5),$$

$$\xi(D_3^{(5)}) = \max_{x \in A_3AB_6} f(x) = 7,5 \quad \text{в точке } B_6(1,5;\ 6),$$

$$\xi(D_4^{(5)}) = \max_{x \in C_2F_2} f(x) = 8 \qquad \text{в точке } F_2(5;3),$$

$$\xi(D_5^{(5)}) = \max_{x \in C_3CB_7} f(x) = 7,5 \quad \text{в точке } B_7(6;\ 1,5).$$

Мы видим, что $\xi_5 = 8$, причем на сей раз мы можем указать три точки с целыми координатами, на которых целевая функция достигает своей оценки:

$$f(4,4) = f(3,5) = f(5,3) = 8.$$

Это означает, что исходная задача имеет три решения: $x^* = (4,4)$, $x^{**} = (3,5)$ и $x^{***} = (5,3)$. Процесс разбиения множеств схематически изображен на рис. 13.

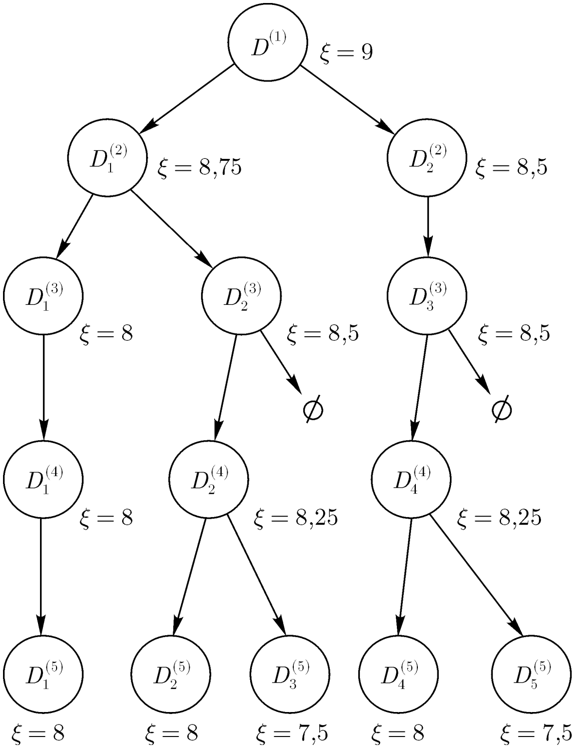

Рис. 13

Вопросы и задания

1. Будут ли ограничения, возникающие при разбиении множеств $D_i^{(j)}$ в ЦЗЛП, правильными отсечениями?

2. Решить задачи из задания 4 к теме «Метод Гомори» методом ветвей и границ. Убедиться, что ответы не зависят от метода решения.

3. Решить методом ветвей и границ задачу ЦЗЛП с ограничениями

$$\begin{cases} 4x + 6y \leqslant 60 \\ 2x - 3y \leqslant 0 \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \\ x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

если а) $5x + y \to \max$, б) $x \to \max$.

Указание. Если целевая функция достигает наибольшего значения в двух вершинах одновременно, то есть на одной из сторон многоугольника, то соответствующее множество $D_i^{(j)}$ разбивается сразу на несколько подмножеств.

4. Может ли случиться так, что $\xi_{n+1} = \xi_n$?

5. Как бы вы организовали нумерацию множеств $D_i^{(j)}$? Какой способ обозначения вершин кажется вам наиболее рациональным? Придумайте соответствующие алгоритмы.

6. Попробуйте решить методом ветвей и границ *задачу о коммивояжере*: найти самый короткий маршрут, начинающийся и заканчивающийся в городе 1 и позволяющий посетить все города по одному разу. Расстояния между городами заданы в таблице:

	1	2	3	4	5
1	0	10	2	8	3
2	10	0	15	1	2
3	2	15	0	3	10
4	8	1	3	0	6
5	3	2	10	6	0

Указание. Выберите, в какой город вы поедете в первую очередь и оцените длину маршрута. Затем найдите наиболее «перспективный» из начатых маршрутов и выберите, какой город будет вторым по счету. Снова оцените маршруты и т. д.

7. Решите методом ветвей и границ задачи:

а) $x + y + z \to \max$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{7} \leqslant \dfrac{1}{2} \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0 \\ x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z},\ z \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

б) $x + y + z + t \to \max$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{6} + \dfrac{z}{4} + \dfrac{t}{7} \leqslant \dfrac{1}{3} \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ t \geqslant 0 \\ x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z},\ z \in \mathbb{Z},\ t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

(В последнем случае надо решить задачу, не прибегая к геометрической интерпретации.)

Литература

[1] Б. Банди. Основы линейного программирования. М: Радио и связь, 1989.

[2] Конюховский. Исследование операций. С-Пб: Питер, 2000.

[3] С. А. Ашманов. Линейное программирование. М.: Наука, 1981.

[4] А. Кофман, А. Анри-Лабордер. Методы и модели исследования операций. М.: Мир, 1977.

[5] А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн. Дискретное программирование. М.: Наука, 1969.