

Шуликовская В. В.

**Исследование операций.  
Целочисленное линейное программирование**

студентам направления  
«Бизнес-информатика»

Ижевск  
2015

ББК 22.183.43р30  
УДК 518.5 (075.5)

**Рецензент** старший преподаватель кафедры высокопроизводительных вычислений и параллельного программирования УдГУ  
П. М. Князев

© В. В. Шуликовская, 2015

В данном методическом пособии рассматриваются различные методы решения целочисленных задач линейного программирования. В пособии приведены примеры решения задач, а также вопросы и задания для самостоятельной работы. Пособие адресовано бакалаврам направления «Бизнес-информатика».



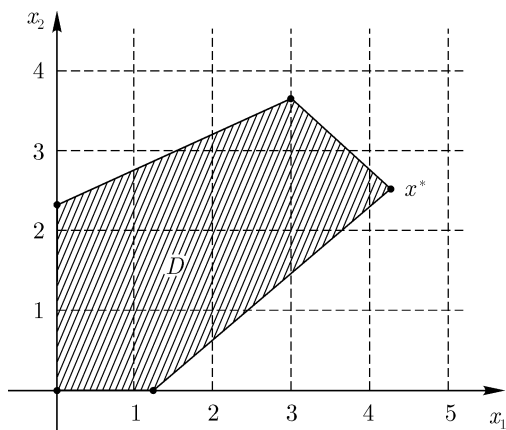


Рис. 1

есть снять условие  $x \in \mathbb{Z}$ ), а затем искать ответ среди целочисленных векторов  $x$ , ближайших к  $x^*$ . Однако, как показывает пример, изображенный на рис. 1, этот способ далеко не всегда приводит нас к правильному ответу. Действительно, ни одна из четырех точек  $(4;2)$ ,  $(4;3)$ ,  $(5;2)$  и  $(5;3)$ , ближайших к  $x^*$ , не принадлежит области  $D$ . Конечно, легко догадаться, что в задаче, изображенной на рисунке, следует рассмотреть точки с координатами  $(3;2)$  и  $(3;3)$ , но если мы столкнемся с многомерной задачей, уже не допускающей геометрического представления, то выбор «ближайших» точек и их проверка на оптимальность будут связаны с громоздкими и зачастую ненужными вычислениями. Кроме того, целевая функция  $f(x)$  может вести себя так, что ее значение на найденной «ближайшей» точке будет намного меньше, чем на настоящем оптимальном плане целочисленной задачи. А если  $f(x)$  достигает максимума не на одной, а на нескольких точках из множества  $D$ , то, округляя  $x^*$ , мы найдем только одно из нескольких возможных решений.

Таким образом, целочисленные задачи линейного программирования требуют применения специальных методов решения. Мы познакомимся с двумя наиболее известными из них: *методом Гомори* и *методом ветвей и границы*.

## Вопросы и задания.

1. Приведите примеры экономических величин, которые могут принимать только целые значения.

2. Приведите примеры моделей, сводящихся к ЦЗЛП или ЦКЗЛП.

3. Относятся ли данные задачи к типу ЦЗЛП или ЦКЗЛП? Почему?

а)  $x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \min$   

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

в)  $x_2 \rightarrow \max$   

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

б)  $x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$   

$$\begin{cases} x_1 + x_2^2 \leq -4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

г)  $x_1 \rightarrow \min$   

$$\begin{cases} 4x_2 + x_3 \geq 0 \\ x_2 \geq 0, x_1 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

4. Пусть функция  $f(x)$  задана графически (см. рис. 2). В каких точках  $f(x)$  достигает наибольшего значения, если

а)  $x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right]$ ,

б)  $x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right] \cap \mathbb{Z}$ ?

Возможна ли такая ситуация, если  $f(x)$  имеет вид  $f(x) = ax + b$ ?  
 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ?

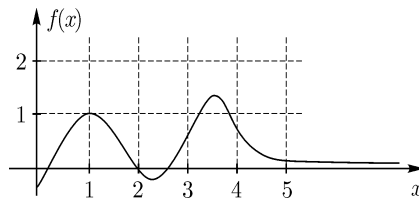


Рис. 2

5. Перечислить все точки пространства  $\mathbb{R}^3$  с целыми координатами,

«ближайшие» к точке  $x = (1\frac{1}{5}; 3\frac{2}{5}; 2\frac{1}{4})$ .

6. Записать данные задачи в виде КЗЛП, затем — ЦКЗЛП.

а)  $x_1 - x_2 \rightarrow \min$   

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 5 \\ 2x_1 - x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

б)  $3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$   

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geq -4 \\ 2x_2 + x_1 = 2 \\ x_2 \leq 0. \end{cases}$$

7. Какие точки с целыми координатами имеет смысл проверять на оптимальность, если область допустимых решений  $D$  в ЗЛП имеет вид, изображенный на рис. 3? (Оптимальный план ЗЛП обозначен  $x^*$ .)

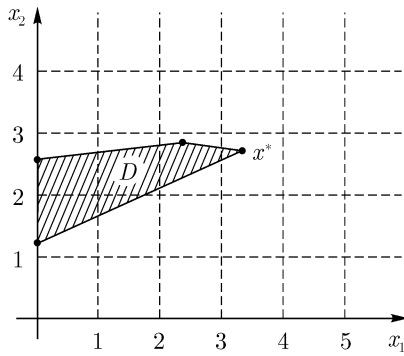


Рис. 3

8. Можно ли записать данную задачу в виде ЦКЗЛП, вводя дополнительные (вспомогательные) переменные?

$$\begin{aligned}
 & 2x_1 + x_2 \rightarrow \max \\
 & \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3,5 \\ x_1 - 4x_2 \leq 1,25 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

9. В каких случаях возможно, вводя новые переменные, перейти от ЦЗЛП к ЦКЗЛП?

10. Могут ли в ЦЗЛП матрица  $A$  и векторы  $b$  и  $c$  иметь нецелые компоненты? В ЦКЗЛП?

11. Можно ли утверждать, что при решении этой задачи переменная  $x_2$  непременно примет целое значение?

$$\begin{aligned}
 & 1,25x_1 - 0,65x_2 \rightarrow \max \\
 & \begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + 4x_2 \leq 7 \\ 4x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 \in \mathbb{Z}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

12. Записать данную задачу в виде ЦЗЛП:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \rightarrow \max \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7 \\ 2x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1 = \frac{k}{2}, x_2 = \frac{n}{2} \\ k, n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

13. Как известно, многие численные методы позволяют найти решение приближенно, с точностью до наперед заданного (сколь угодно малого)  $\varepsilon$ . Как в таком случае можно проверить решение на целочисленность?

## Метод Гомори

Данный метод предназначен для решения ЦКЗЛП и требует предварительного решения ее непрерывного аналога, то есть задачи, в которой снято требование целочисленности. Если найденный оптимальный план  $x^*$  содержит только целые компоненты, то мы автоматически получаем решение ЦКЗЛП. Иначе к системе ограничений задачи добавляется еще одно, дополнительное ограничение с таким расчетом, чтобы:

- 1) найденный оптимальный план  $x^*$  не удовлетворял новому ограничению,
- 2) все допустимые целочисленные планы исходной задачи этому ограничению удовлетворяли.

Такое ограничение называется *правильным отсечением*, а сам метод Гомори часто называют *методом отсекающих плоскостей*.

На рис. 4 прямые I и II будут правильными отсечениями, а прямые III и IV — нет. Кроме того, легко понять, что прямая I «лучше», чем прямая II, так как прямая I отсекает большую часть области  $D$ . Вообще, прямая I — лучшее из возможных правильных отсечений с данным угловым коэффициентом. Если же нам известно, как проходит линия уровня целевой функции  $f(x)$ , то мы сможем решить, в каком направлении (с каким угловым коэффициентом) следует проводить правильные отсечения, чтобы как можно быстрее получить целочисленное решение задачи.

Итак, проведя правильное отсечение, мы находим новую область допустимых решений  $D_1$  и решаем новую КЗЛП (по-прежнему сняв условие целочисленности). Если все компоненты нового оптимального

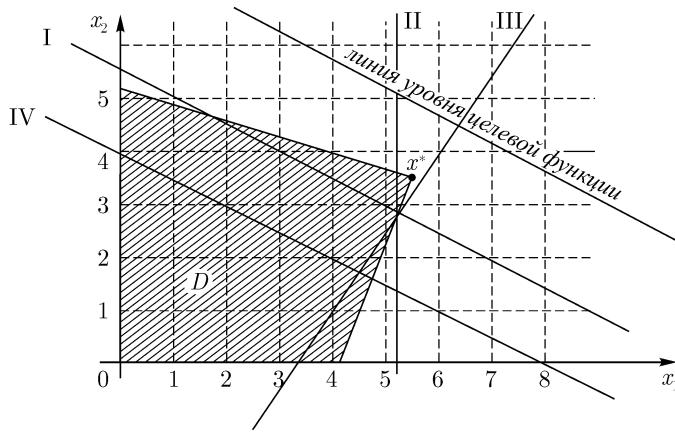


Рис. 4

плана  $x_1^*$  целые, то задача решена. В противном случае процесс повторяется.

Теперь следует решить, каким образом выбирать правильные отсечения в многомерных задачах, не допускающих графической интерпретации. С этой целью рассмотрим следующий пример:

$$f(x) = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Решим непрерывный аналог исходной задачи с помощью симплекс-метода. Последняя симплекс-таблица имеет вид:

$$T_1 = \begin{array}{c|ccc|c} & 10 & 0 & 0 & 3 \\ \hline 1 & \frac{11}{5} & 1 & 0 & \frac{6}{5} \\ 2 & \frac{17}{5} & 0 & 1 & \frac{7}{5} \end{array}$$

В строке оценок  $(0,0,3)$  нет отрицательных чисел, следовательно, базис  $x_1, x_2$  (в первом столбце стоят числа 1 и 2) является оптимальным. Соответствующий план  $x^* = (\frac{11}{5}, \frac{17}{5}, 0)$ , значение функции  $f(x) = 10$ . Как видим, найденный план не является целочисленным.



Рассмотрим в таблице  $T_1$  строку  $(\frac{11}{5}, 1, 0, \frac{6}{5})$ , соответствующую нецелой координате  $x_1$ . Первое из уравнений нашей задачи в базисе  $x_1, x_2$  имеет вид:

$$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \frac{6}{5} \cdot x_3 = \frac{11}{5}.$$

Теперь представим  $\frac{6}{5}$  и  $\frac{11}{5}$  в виде

$$\left[ \frac{6}{5} \right] + \left\{ \frac{6}{5} \right\} \quad \text{и} \quad \left[ \frac{11}{5} \right] + \left\{ \frac{11}{5} \right\}$$

соответственно, где  $[\alpha]$  и  $\{\alpha\}$  обозначают целую и дробную часть числа  $\alpha$ , причем

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}, \quad \{\alpha\} \in [0; 1).$$

Получаем уравнение

$$x_1 + \left[ \frac{6}{5} \right] x_3 + \left\{ \frac{6}{5} \right\} x_3 = \left[ \frac{11}{5} \right] + \left\{ \frac{11}{5} \right\}$$

или

$$x_1 + \left[ \frac{6}{5} \right] x_3 - \left[ \frac{11}{5} \right] = -\left\{ \frac{6}{5} \right\} x_3 + \left\{ \frac{11}{5} \right\}. \quad (1)$$

Теперь рассмотрим неравенство

$$-\left\{ \frac{6}{5} \right\} x_3 + \left\{ \frac{11}{5} \right\} \leq 0. \quad (2)$$

Очевидно, что базисный план  $x^*$  этому неравенству не удовлетворяет: небазисная переменная  $x_3$  равна нулю, а  $\frac{11}{5}$  — число нецелое, так что  $\left\{ \frac{11}{5} \right\} > 0$ .

С другой стороны, если  $x = (x_1, x_2, x_3)$  содержит только целые компоненты, то в левой части (1) стоит целое число, поэтому и  $-\left\{ \frac{6}{5} \right\} x_3 + \left\{ \frac{11}{5} \right\}$  — число целое. Допустим, оно строго положительно.

Учитывая, что  $\left\{ \frac{11}{5} \right\} < 1$ , а  $\left\{ \frac{6}{5} \right\} x_3 \geq 0$ , видим, что

$$0 < -\left\{ \frac{6}{5} \right\} x_3 + \left\{ \frac{11}{5} \right\} < 1.$$

Но на интервале  $(0;1)$  нет целых чисел, так что для любого целочисленного плана выполняется противоположное неравенство, то есть неравенство (2).

Таким образом, ограничение

$$-\left\{\frac{6}{5}\right\}x_3 \leq -\left\{\frac{11}{5}\right\}$$

образует правильное отсечение. Для перехода к канонической задаче добавляем вспомогательную переменную  $x_4$ :

$$-\left\{\frac{6}{5}\right\}x_3 + x_4 = -\left\{\frac{11}{5}\right\}, \quad x_4 \geq 0$$

или

$$-\frac{1}{5}x_3 + x_4 = -\frac{1}{5}, \quad x_4 \geq 0.$$

Поскольку в новой задаче имеется три ограничения, нам нужна еще одна, третья, базисная переменная. В качестве этой переменной возьмем  $x_4$ . Поскольку дополнительное ограничение не содержит «старых» базисных переменных, его можно попросту дописать к уже имеющейся симплекс-таблице  $T_1$ . Мы получим таблицу  $T_2^{(1)}$ :

$$T_2^{(1)} = \begin{array}{c|cccc} & 10 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 1 & \frac{11}{5} & 1 & 0 & \frac{6}{5} & 0 \\ 2 & \frac{17}{5} & 0 & 1 & \frac{7}{5} & 0 \\ 4 & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 1 \end{array}$$

План  $x = \left(\frac{11}{5}, \frac{17}{5}, 0, -\frac{1}{5}\right)$  недопустим, так как  $-\frac{1}{5} < 0$ , зато строка оценок  $(0, 0, 3, 0)$  не содержит отрицательных чисел. Это означает, что нашу задачу можно решить двойственным симплекс методом. Переходя к базису  $x_1, x_2, x_3$ , получаем таблицу:

$$T_2^{(2)} = \begin{array}{c|cccc} & 7 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}$$

Поскольку в столбце  $(1, 2, 1)^T$  нет отрицательных чисел, план  $x = (1, 2, 1, 0)$  оптимален. Кроме того, он целочисленный. Таким

образом, решение исходной задачи  $x^* = (1, 2, 1)$ ,  $f(x^*) = 7$  (отметим, что значение целевой функции уменьшилось).

Пусть теперь в общем случае последняя симплекс-таблица, найденная при решении КЗЛП, имеет вид (для наглядности мы предположим, что переменные, входящие в базис, стоят на первых местах):

$$T = \begin{array}{c|ccccccc} & \widehat{\alpha}_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{0,m+1} & \dots & \alpha_{0,n} \\ \hline N_1 & \widehat{\alpha}_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{1,m+1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ N_2 & \widehat{\alpha}_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_{2,m+1} & \dots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ N_m & \widehat{\alpha}_m & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{m,m+1} & \dots & \alpha_{m,n} \end{array}$$

Пусть  $\widehat{\alpha}_i$  — первая по счету нецелая компонента оптимального плана

$$x^* = (\widehat{\alpha}_1, \widehat{\alpha}_2, \dots, \widehat{\alpha}_m, 0, \dots, 0).$$

Тогда  $i$ -ое уравнение в системе ограничений задачи имеет вид:

$$x_i + \sum_{j=m+1}^n \alpha_{ij} x_j = \widehat{\alpha}_i.$$

Если

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= [\alpha_{ij}] + \{\alpha_{ij}\}, \\ \widehat{\alpha}_i &= [\widehat{\alpha}_i] + \{\widehat{\alpha}_i\}, \end{aligned}$$

то наше уравнение можно переписать в виде

$$x_i + \sum_{j=m+1}^n [\alpha_{ij}] x_j - [\widehat{\alpha}_i] = - \sum_{j=m+1}^n \{\alpha_{ij}\} x_j + \{\widehat{\alpha}_i\}. \quad (3)$$

Теперь рассмотрим неравенство

$$- \sum_{j=m+1}^n \{\alpha_{ij}\} x_j + \{\widehat{\alpha}_i\} \leq 0. \quad (4)$$

Оптимальный план  $x^*$  ему не удовлетворяет, так как у него

$$x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 0,$$

а  $\{\widehat{\alpha}_i\} > 0$ , потому что  $\widehat{\alpha}_i$  — число нецелое. Напротив, если  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  имеет только целые компоненты, то в силу (3)

левая часть неравенства (4) — число целое. Но  $\{\widehat{\alpha}_i\} < 1$ ,  $\{\alpha_{ij}\}x_j \geq 0$  для всех  $j = m+1, \dots, n$ , так что

$$- \sum_{j=m+1}^n \{\alpha_{ij}\}x_j + \{\widehat{\alpha}_i\} < 1,$$

то есть

$$- \sum_{j=m+1}^n \{\alpha_{ij}\}x_j + \{\widehat{\alpha}_i\} \leq 0,$$

поскольку 0 — наибольшее целое число, которое меньше, чем 1.

Итак, ограничение (4) — это правильное отсечение. Вводим вспомогательную переменную  $x_{n+1}$ :

$$- \sum_{j=m+1}^n \{\alpha_{ij}\}x_j + x_{n+1} = -\{\widehat{\alpha}_i\}, \quad x_{n+1} \geq 0$$

и получаем новую симплекс-таблицу

$$T' = \begin{array}{c|cccccc} & \widehat{\alpha}_0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{0,m+1} & \dots & \alpha_{0,n} & 0 \\ \hline N_1 & \widehat{\alpha}_1 & 1 & \dots & 0 & \alpha_{1,m+1} & \dots & \alpha_{1,n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ N_m & \widehat{\alpha}_m & 0 & \dots & 1 & \alpha_{m,m+1} & \dots & \alpha_{m,n} & 0 \\ N_{m+1} & -\{\widehat{\alpha}_i\} & 0 & \dots & 0 & -\{\alpha_{i,m+1}\} & \dots & -\{\alpha_{i,n}\} & 1 \end{array}$$

Как и раньше, соответствующую задачу можно решить двойственным симплекс-методом.

Итак, чтобы получить правильное отсечение, надо рассмотреть неравенство

$$- \sum \{\alpha_{ij}\}x_j \leq -\{\widehat{\alpha}_i\},$$

где  $i$  — номер первой нецелой компоненты оптимального плана,  $\alpha_{ij}$  и  $\widehat{\alpha}_i$  — числа, стоящие в  $i$ -ой строке симплекс-таблицы, а суммирование ведется по тем переменным  $x_j$ , которые не вошли в базис.

Рассмотрим еще два примера решения задач.

Пример 1.

$$18x_1 + 49x_2 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ 4x_1 + 11x_2 \leq 44 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Откажемся от условия целочисленности и перейдем к канонической задаче:

$$18x_1 + 49x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 4x_1 + 11x_2 + x_4 = 44 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Если принять в качестве базисных вспомогательные переменные  $x_3$  и  $x_4$ , то первую симплекс-таблицу можно записать в виде

$$T_1^{(1)} = \begin{array}{c|cccccc} & 0 & -18 & -49 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 6 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 44 & 4 & 11 & 0 & 1 \end{array}$$

План  $x = (0, 0, 6, 44)$  не оптимален, поскольку в строке оценок  $(-18, -49, 0, 0)$  есть два отрицательных числа. Вводим в базис переменную  $x_2$ , поскольку ей соответствует меньшее отрицательное число  $-49$ . Чтобы определить, какую переменную следует выводить из базиса, рассмотрим отношения  $\frac{6}{1}$  и  $\frac{44}{11}$ . (Числа из нулевого столбца делятся на числа из столбца, соответствующего переменной  $x_2$ .) Меньшее из них,  $\frac{44}{11}$ , стоит в строке, соответствующей  $x_4$ . Выводим эту переменную из базиса. Теперь нам надо сосчитать коэффициенты новой симплекс-таблицы с таким расчетом, чтобы в столбцах  $x_2$  и  $x_3$  (новый базис) стояли элементы единичной матрицы. Сначала делим строку  $x_4$  на 11 (чтобы получить 1 на месте элемента 11, который называется *ведущим*), затем вычитаем эту строку из двух других так, чтобы получить нули в столбце  $x_2$  (заметим, что столбец  $x_3$  при этом не изменится):

$$\begin{pmatrix} 0 & -18 & -49 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 44 & 4 & \textcircled{11} & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \left(\frac{1}{11}\right) \sim \begin{pmatrix} 0 & -18 & -49 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & \frac{4}{11} & \textcircled{1} & 0 & \frac{1}{11} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \uparrow^{49} \\ \leftarrow^{(-1)} \\ \downarrow \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 196 & -\frac{2}{11} & 0 & 0 & \frac{49}{11} \\ 2 & \frac{7}{11} & 0 & 1 & -\frac{1}{11} \\ 4 & \frac{4}{11} & \textcircled{1} & 0 & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$$

Новая симплекс-таблица имеет вид:

$$T_1^{(2)} = \begin{array}{c|ccccc} & 196 & -\frac{2}{11} & 0 & 0 & \frac{49}{11} \\ \hline 3 & 2 & \frac{7}{11} & 0 & 1 & -\frac{1}{11} \\ \hline 2 & 4 & \frac{4}{11} & 1 & 0 & \frac{1}{11} \end{array}$$

План  $x = (0, 4, 2, 0)$  не оптимален ( $-\frac{2}{11} < 0$ ). Вводим в базис  $x_1$ , выводим  $x_3$  ( $2 : \frac{7}{11} < 4 : \frac{4}{11}$ ). Ведущий элемент равен  $\frac{7}{11}$ .

$$\begin{array}{c} \left( \begin{array}{ccccc} 196 & -\frac{2}{11} & 0 & 0 & \frac{49}{11} \\ 2 & \textcircled{\frac{7}{11}} & 0 & 1 & -\frac{1}{11} \\ 4 & \frac{4}{11} & 1 & 0 & \frac{1}{11} \end{array} \right) \times \left( \frac{11}{7} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc} 196 & -\frac{2}{11} & 0 & 0 & \frac{49}{11} \\ \frac{22}{7} & \textcircled{1} & 0 & \frac{11}{7} & -\frac{1}{7} \\ 4 & \frac{4}{11} & 1 & 0 & \frac{1}{11} \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \left( \frac{2}{11} \right) \\ \sim \\ \leftarrow \left( -\frac{4}{11} \right) \end{array} \\ \sim \left( \begin{array}{ccccc} \frac{1376}{7} & 0 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{31}{7} \\ \frac{22}{7} & \textcircled{1} & 0 & \frac{11}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{20}{7} & 0 & 1 & -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{array} \right) \end{array}$$

Таким образом,

$$T_1^{(3)} = \begin{array}{c|ccccc} & \frac{1376}{7} & 0 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{31}{7} \\ \hline 1 & \frac{22}{7} & 1 & 0 & \frac{11}{7} & -\frac{1}{7} \\ \hline 2 & \frac{20}{7} & 0 & 1 & -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{array}$$

Найденный план  $x = \left( \frac{22}{7}, \frac{20}{7}, 0, 0 \right)$  — оптимальный, но не целочисленный. Первая по счету нецелая компонента  $x_1 = \frac{22}{7}$ . Нам надо будет добавить ограничение

$$-\left\{ \frac{11}{7} \right\} x_3 - \left\{ -\frac{1}{7} \right\} x_4 \leq -\left\{ \frac{22}{7} \right\},$$

то есть

$$-\frac{4}{7}x_3 - \frac{6}{7}x_4 \leq -\frac{1}{7}.$$

Заметим, что если вспомнить про уравнения

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 4x_1 + 11x_2 + x_4 = 44, \end{cases}$$

то, выражая  $x_3$  и  $x_4$  через  $x_1$  и  $x_2$  и умножая все на 7, приходим к неравенству  $4x_1 + 10x_2 \leq 41$ . Ему соответствует правильное отсечение, изображенное на рис. 5.

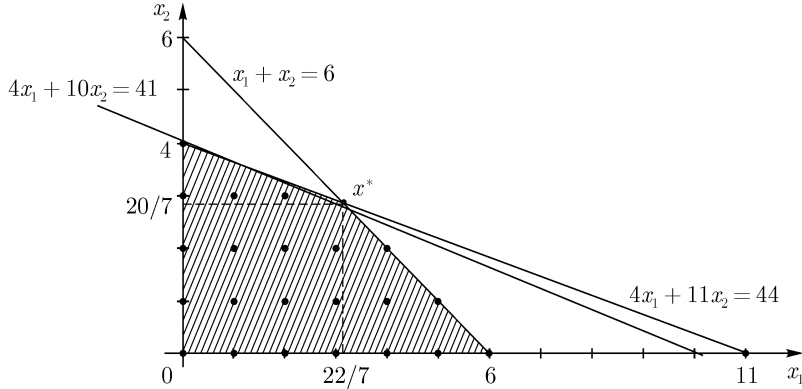


Рис. 5

Как видим, это далеко не лучшее из возможных отсечений: эту прямую можно было бы «сдвинуть» влево и вниз, слегка развернув, чтобы она прошла через точки  $(0;4)$ ,  $(2;3)$  и  $(4;2)$ .

Теперь введем еще одну вспомогательную переменную  $x_5$  и получаем ограничение типа равенства:

$$-\frac{4}{7}x_3 - \frac{6}{7}x_4 + x_5 = -\frac{1}{7}, \quad x_5 \geq 0.$$

Добавляя  $x_5$  к множеству базисных переменных, составляем новую симплекс-таблицу:

$$T_2^{(1)} = \begin{array}{c|ccccc} & \frac{1376}{7} & 0 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{31}{7} & 0 \\ \hline 1 & \frac{22}{7} & 1 & 0 & \frac{11}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ 2 & \frac{20}{7} & 0 & 1 & -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 5 & -\frac{1}{7} & 0 & 0 & -\frac{4}{7} & -\frac{6}{7} & 1 \end{array}$$

Воспользуемся двойственным симплекс-методом. Нам надо вывести из базиса  $x_5$  (поскольку в столбце  $\left(\frac{22}{7}, \frac{20}{7}, -\frac{1}{7}\right)^T$  именно этой переменной соответствует отрицательное число). Чтобы определить, какую из переменных надо ввести в базис, рассмотрим отношения  $\frac{2}{7} : \frac{4}{7}$  и  $\frac{31}{7} : \frac{6}{7}$  (числа, стоящие в нулевой строке оценок, делятся на модули отрицательных чисел из строки  $x_5$ ). Меньшее число соответствует переменной  $x_3$ . Ее и следует ввести в базис. Как и ранее, пересчитываем коэффициенты симплекс-таблицы с таким расчетом, чтобы на месте ведущего элемента, то есть  $-\frac{4}{7}$ , оказалась 1, а все остальные числа в столбце  $x_3$  обратились в нуль. Получаем новую симплекс-таблицу:

$$T_2^{(2)} = \begin{array}{c|ccccc} & \frac{393}{2} & 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{1}{2} \\ \hline 1 & \frac{11}{4} & 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{11}{4} \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} \end{array}$$

План  $x = \left(\frac{11}{4}, 3, \frac{1}{4}, 0, 0\right)$  — оптимальный, но не целочисленный. Поскольку  $x_1 \notin \mathbb{Z}$ , рассматриваем первую строку таблицы  $T_2^{(2)}$  и получаем ограничение

$$-\left\{-\frac{5}{2}\right\}x_4 - \left\{\frac{11}{4}\right\}x_5 \leq -\left\{\frac{11}{4}\right\},$$

то есть

$$-\frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{4}x_5 \leq -\frac{3}{4}$$

или

$$-\frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{4}x_5 + x_6 = -\frac{3}{4}, \quad x_6 \geq 0.$$

Добавляя к множеству базисных переменных  $x_6$ , составляем таблицу:

$$T_3^{(1)} = \begin{array}{c|ccccc} & \frac{393}{2} & 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline 1 & \frac{11}{4} & 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{11}{4} & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & 0 \\ 6 & -\frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \end{array}$$



Выводя из базиса  $x_6$  и вводя  $x_5$ , находим следующую таблицу:

$$T_3^{(2)} = \begin{array}{c|cccccc} & 196 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{13}{3} & 0 & \frac{11}{3} \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 & -\frac{7}{3} \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{4}{3} \end{array}$$

Найденный план  $x = (0, 4, 2, 0, 1, 0)$  — оптимальный и целочисленный. В исходной задаче ему соответствует решение  $x_1 = 0, x_2 = 4$  (заметим, что эта точка находится достаточно «далеко» от решения непрерывной задачи, то есть от точки  $(\frac{22}{7}, \frac{20}{7})$ ). Тот факт, что вспомогательные переменные  $x_3$  и  $x_5$  отличны от нуля, означает, что связанные с ними ограничения выполняются для  $x_1$  и  $x_2$  как неравенства, а не как равенства. Это не должно нас удивлять, поскольку, строя правильные отсечения, мы неизбежно оказываемся внутри изначальной области  $D$ .

Пример 2.

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ 3x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{array} \right. \end{array}$$

Отказываемся от условия целочисленности и переходим к канонической задаче:

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{array} \right. \end{array}$$

Беря  $x_3$  и  $x_4$  в качестве базисных переменных, составляем симплекс-таблицу:

$$T_1^{(1)} = \begin{array}{c|cccccc} & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 8 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & \mathbf{3} & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Выводя из базиса  $x_4$  и вводя  $x_1$ , получаем:

$$T_1^{(2)} = \begin{array}{c|ccc|cc} & \frac{14}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \hline 3 & \frac{17}{3} & 0 & \frac{8}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ \hline 1 & \frac{7}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}$$

Выводим из базиса  $x_3$ , вводим  $x_2$ :

$$T_1^{(3)} = \begin{array}{c|ccc|cc} & \frac{43}{8} & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ \hline 2 & \frac{17}{8} & 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ \hline 1 & \frac{13}{8} & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{array}$$

План  $x = \left(\frac{13}{8}, \frac{17}{8}\right)$  оптимален. Первая нецелочисленная координата  $x_1 = \frac{13}{8}$ . Добавляем ограничение

$$-\frac{7}{8}x_3 - \frac{3}{8}x_4 + x_5 = -\frac{5}{8}, \quad x_5 \geq 0.$$

Новая симплекс-таблица:

$$T_2^{(1)} = \begin{array}{c|ccc|cc|c} & \frac{43}{8} & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & 0 \\ \hline 2 & \frac{17}{8} & 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \\ \hline 1 & \frac{13}{8} & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 \\ \hline 5 & -\frac{5}{8} & 0 & 0 & -\frac{7}{8} & -\frac{3}{8} & 1 \end{array}$$

Выводим из базиса переменную  $x_5$ , вводим  $x_3$ :

$$T_2^{(2)} = \begin{array}{c|ccc|cc|c} & \frac{37}{7} & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ \hline 2 & \frac{13}{7} & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \hline 1 & \frac{12}{7} & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \hline 3 & \frac{5}{7} & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{7} & -\frac{8}{7} \end{array}$$

Добавляем ограничение:

$$-\frac{3}{7}x_4 - \frac{6}{7}x_5 + x_6 = -\frac{5}{7}.$$

Следующая симплекс-таблица:

$$T_3^{(1)} = \begin{array}{c|cccccc} & \frac{37}{7} & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ \hline 2 & \frac{13}{7} & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ 1 & \frac{12}{7} & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ 3 & \frac{5}{7} & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{7} & -\frac{8}{7} & 0 \\ 6 & -\frac{5}{7} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & 1 \end{array}$$

Выводим из базиса  $x_6$ , вводим  $x_5$ :

$$T_3^{(2)} = \begin{array}{c|cccccc} & \frac{31}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} \\ \hline 2 & \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{11}{6} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 3 & \frac{5}{3} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 5 & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{7}{6} \end{array}$$

Добавляем еще одно ограничение:

$$-\frac{1}{2}x_4 - \frac{5}{6}x_6 + x_7 = -\frac{5}{6}.$$

Получаем таблицу:

$$T_4^{(1)} = \begin{array}{c|ccccccc} & \frac{31}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \hline 2 & \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{11}{6} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 3 & \frac{5}{3} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 5 & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{7}{6} & 0 \\ 7 & -\frac{5}{6} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{6} & 1 \end{array}$$

Наконец, выводя из базиса  $x_7$  и вводя  $x_6$ , получаем:

$$T_4^{(2)} = \begin{array}{c|ccccccc} & 5 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ \hline 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{3}{5} \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\ \hline 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & \frac{9}{5} & 0 & 0 & -\frac{8}{5} \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5} & 1 & 0 & -\frac{7}{5} \\ \hline 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 1 & -\frac{6}{5} \end{array}$$

План  $x = (2, 1, 3, 0, 2, 1, 0)$  — оптимальный и целочисленный. В исходной задаче функция достигает наибольшего значения в точке с координатами  $(2;1)$ .

## Вопросы и задания

1. Построить какие-нибудь правильные отсечения для областей, изображенных на рис. 1 и 3. Почему прямые III и IV, изображенные на рис. 4, не являются правильными отсечениями?

2. Верно ли, что при добавлении к задаче правильного отсечения оптимальное значение функции  $f(x)$  будет убывать?

3. Каким образом можно обобщить метод Гомори на тот случай, когда требование целочисленности относится лишь к некоторым переменным?

4. а) Решить данные задачи методом Гомори. Построить правильное отсечение, соответствующее первому из дополнительных ограничений.

б) Решить эти же задачи графически. Сравнить ответы.

$$1) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \max \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 33 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 \leq 4, 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$3) \quad 2x_1 - x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 - x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$4) \quad x_1 + x_2 - 2x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 7 \\ 3x_1 + 5x_3 = 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

5. Попытайтесь решить задачу

$$x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 12x_2 \leq 21 \\ 2x_2 \geq 3 \\ x_1 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

методом Гомори. Решить эту же задачу графически. Сделать выводы.  
Указание. При переходе к КЗЛП

$$x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 12x_2 + x_3 = 21 \\ -2x_2 + x_4 = -3 \\ x_1 + x_5 = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

базис  $x_3, x_4, x_5$  недопустим, так как при  $x_1 = x_2 = 0$  переменная  $x_4 = -3 < 0$ . Вместе с тем легко заметить, что базис  $x_2, x_3, x_5$  является допустимым, потому что при  $x_1 = x_4 = 0$  переменные  $x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = 3, x_5 = 1$ . Из второго уравнения следует, что  $x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_4$ . Подставляя это выражение в целевую функцию и в первое уравнение, получаем задачу

$$x_1 + \frac{1}{2}x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_4 + x_3 = 3 \\ -\frac{1}{2}x_4 + x_2 = \frac{3}{2} \\ x_1 + x_5 = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5, \end{cases}$$

эквивалентную исходной. Теперь, взяв в качестве базисных переменных  $x_2$ ,  $x_3$  и  $x_5$ , мы можем составить первую симплекс-таблицу по тому же правилу, что и раньше.

6. Можно ли утверждать, что, решая задачу методом Гомори, мы за конечное число шагов найдем целочисленное решение? Можно ли это утверждать, если мы решаем задачу на компьютере?

## Метод ветвей и границ

Термин «метод ветвей и границ» в действительности обозначает целое семейство методов, применяемых при решении очень разных *дискретных* задач (то есть задач, в которых переменные могут принимать значения из какого-нибудь конечного множества  $D$ ), как линейных, так и нелинейных.

Изложим основные принципы, объединяющие это семейство методов.

Пусть надо решить задачу:

$$\begin{cases} f(x) \rightarrow \max, \\ x \in D, \end{cases}$$

где  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_r\}$  — конечное множество. Обозначаем  $D^{(1)} = D$  и каким-то образом оцениваем  $f(x)$  на всем множестве  $D^{(1)}$ :

$$\max_{x \in D} f(x) \leq \xi(D^{(1)}) = \xi_1.$$

Если можно найти такое  $x^* \in D$ , что  $f(x^*) = \xi(D^{(1)})$ , то искомое решение найдено и равно  $x^*$ . Иначе мы каким-то способом разбиваем множество  $D^{(1)}$  на подмножества:

$$D^{(1)} = D_1^{(2)} \cup D_2^{(2)} \cup \dots \cup D_k^{(2)},$$

где  $D_i^{(2)} \cap D_j^{(2)} = \emptyset$ ,  $i \neq j$ , и оцениваем  $f(x)$  на каждом  $D_i^{(2)}$ :

$$\max_{x \in D_i^{(2)}} f(x) \leq \xi(D_i^{(2)}).$$

Оценки становятся более точными, то есть

$$\xi(D_i^{(2)}) \leq \xi(D^{(1)}), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Если теперь мы можем найти такое  $x^*$ , что

$$f(x^*) = \xi_2 = \max_{i=1, \dots, k} \xi(D_i^{(2)}),$$

то  $x^*$  — наш оптимальный план. Иначе выбираем наиболее «перспективные» множества  $D_i^{(2)}$ , то есть множества с наибольшей оценкой  $\xi(D_i^{(2)})$  и снова разбиваем их на подмножества. Далее повторяется процесс оценивания множеств и, в случае необходимости, их разбиения.

Теперь посмотрим, как реализуются эти общие идеи при решении ЦЗЛП.

Пример 1. Допустим, нам надо решить задачу

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ &\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ 3x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Рассмотрим непрерывный аналог данной задачи:

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ &\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ 3x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Поскольку у нас всего две переменных, мы можем решить эту задачу графически. Областью допустимых решений будет многоугольник  $OABC$  с вершинами  $O(0, 0)$ ,  $A(0, \frac{8}{3})$ ,  $B(\frac{13}{8}, \frac{17}{8})$  и  $C(\frac{7}{3}, 0)$  (см. рис. 6).

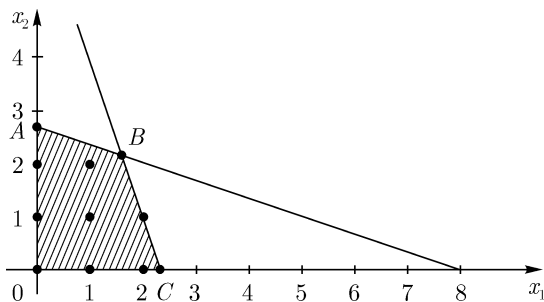


Рис. 6

Целевая функция достигает наибольшего значения в точке  $B$ ,

$$f(B) = 2 \cdot \frac{13}{8} + \frac{17}{8} = \frac{43}{8}.$$

Множество  $D^{(1)}$  состоит из всех точек с целыми координатами, попадающих в четырехугольник  $OABC$ . (Мы видим, что в действительности



множество  $D^{(1)}$  содержит 8 элементов.) Понятно, что для всех  $x \in D^{(1)}$

$$f(x) \leq f(B) = \frac{43}{8},$$

то есть число  $\frac{43}{8}$  можно принять за оценку множества  $D^{(1)}$ :  $\xi(D^{(1)}) = \frac{43}{8}$ . Мы не можем указать такой план  $x \in D^{(1)}$ , чтобы  $f(x) = \xi(D^{(1)})$ , поэтому будем разбивать  $D^{(1)}$  на подмножества. Рассмотрим точку  $B\left(\frac{13}{8}, \frac{17}{8}\right)$ . Для нее  $x_1 = \frac{13}{8} \notin \mathbb{Z}$ . Вместе с тем  $1 < \frac{13}{8} < 2$ . Поэтому, разбивая  $D_1$  на подмножества, добавим к имеющейся системе ограничений неравенства  $x_1 \leq 1$  или  $x_1 \geq 2$ . При этом мы не потеряли ни одной целой точки, хотя из четырехугольника  $OABC$  будет удален целый кусок (вместе с оптимальным планом  $\left(\frac{13}{8}, \frac{17}{8}\right)$ ). Множества  $D_1^{(2)}$  и  $D_2^{(2)}$  определены системами ограничений

$$D_1^{(2)}: \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ 3x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad D_2^{(2)}: \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ 3x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Мы получаем два непрерывных аналога нашей ЦЗЛП:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ 3x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ 3x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 \geq 2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Соответствующие области допустимых решений изображены на рис. 7.

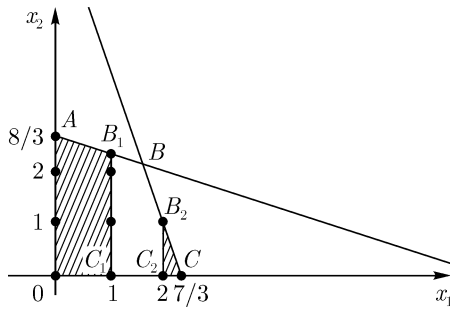


Рис. 7

Ищем наибольшее значение целевой функции на множествах  $OAB_1C_1$  и  $C_2B_2C$ .

$$\begin{aligned} \max_{x \in OAB_1C_1} f(x) &= \frac{13}{3} && \text{при } x_1 = 1, x_2 = \frac{7}{3} \quad (\text{точка } B_1), \\ \max_{x \in C_2B_2C} f(x) &= 5 && \text{при } x_1 = 2, x_2 = 1 \quad (\text{точка } B_2). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \xi(D_1^{(2)}) &= \frac{13}{3}, \\ \xi(D_2^{(2)}) &= 5, \\ \xi_2 &= \max\{\xi(D_1^{(2)}), \xi(D_2^{(2)})\} = 5. \end{aligned}$$

Мы можем указать целочисленный план  $x = (2; 1)$ , для которого  $f(x) = \xi_2$ . Этот план и будет решением нашей задачи.

Пример 2.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\rightarrow \max \\ \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 27 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 27 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Решаем непрерывный аналог нашей задачи (область допустимых планов показана на рис. 8).

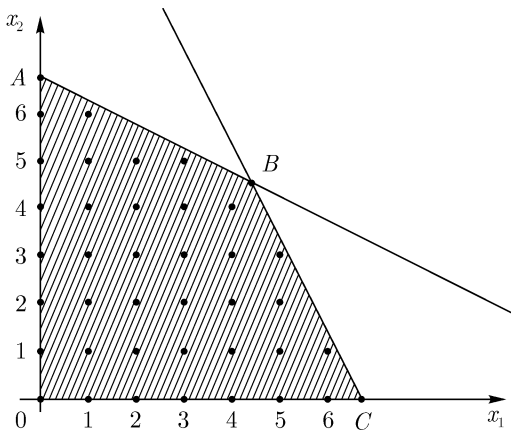


Рис. 8

Здесь  $A\left(0, \frac{27}{4}\right)$ ,  $B\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$ ,  $C\left(\frac{27}{4}, 0\right)$ . Целевая функция достигает наибольшего значения в точке  $B$ ,  $f(B) = 9$ . Таким образом,  $\xi(D^{(1)}) = 9$ .

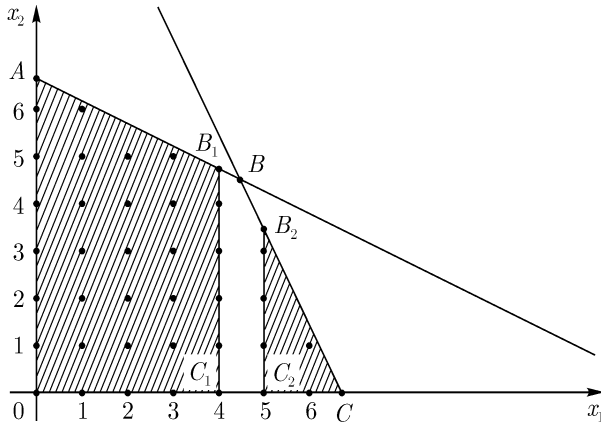


Рис. 9

Поскольку первая координата точки  $B$   $x_1 = \frac{9}{2} \notin \mathbb{Z}$ , разбиваем множество  $D^{(1)}$  на два подмножества, добавляя ограничения  $x_1 \leq 4$  и  $x_1 \geq 5$  (мы учли, что  $x_1 = \frac{9}{2} \in (4; 5)$ ). Итак, у нас возникают два подмножества:

$$D_1^{(2)}: \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 27 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 27 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad \text{и} \quad D_2^{(2)}: \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 27 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 27 \\ x_1 \geq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

На рис. 9 изображены области допустимых решений, возникающие в непрерывных аналогах нашей задачи. Это многоугольники  $OAB_1C_1$  и  $C_2B_2C$ .

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \max_{x \in OAB_1C_1} f(x) &= 8,75 && \text{при } x_1 = 4, x_2 = 4,75 \quad (\text{точка } B_1), \\ \max_{x \in C_2B_2C} f(x) &= 8,5 && \text{при } x_1 = 5, x_2 = 3,5 \quad (\text{точка } B_2). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\xi(D_1^{(2)}) = 8,75,$$

$$\xi(D_2^{(2)}) = 8,5,$$

$$\xi_2 = \max\{8,75; 8,5\} = 8,75.$$

Мы не можем указать точку  $x$  с целыми координатами, для которой  $f(x) = 8,75$ , поэтому выберем множество  $D_1^{(2)}$  как более «перспективное» ( $\xi(D_1^{(2)}) > \xi(D_2^{(2)})$ ) и разобьем его на подмножества, добавляя ограничения  $x_2 \leq 4$  и  $x_2 \geq 5$  (первая по счету нецелая координата точки  $B_1$  — это  $x_2 = 4,75$ ). Получаем следующий набор множеств:

$$D_1^{(3)} : \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 27 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 27 \\ x_1 \leq 4, x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad D_2^{(3)} : \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 27 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 27 \\ x_1 \leq 4, x_2 \geq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$D_3^{(3)} = D_2^{(2)}.$$

Соответствующие многоугольники на плоскости (для непрерывных задач) изображены на рис. 10. (Для удобства в каждом многоугольнике проставлено то множество, которому он соответствует.)

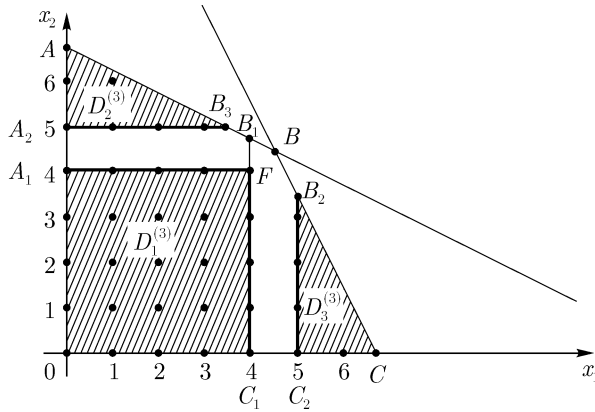


Рис. 10

Находим оценки целевой функции  $f(x)$  для каждого из этих множеств:

$$\xi(D_1^{(3)}) = \max_{x \in OA_1FC_1} f(x) = 8 \quad \text{при } x_1 = 4, x_2 = 4 \quad (\text{точка } F),$$

$$\xi(D_2^{(3)}) = \max_{x \in A_2AB_3} f(x) = 8,5 \quad \text{при } x_1 = 3,5, x_2 = 5 \quad (\text{точка } B_3),$$

$$\xi(D_3^{(3)}) = \xi(D_2^{(2)}) = 8,5 \quad \text{при } x_1 = 5, x_2 = 3,5 \quad (\text{точка } B_2).$$

Таким образом,  $\xi_3 = \max\{8; 8,5; 8,5\} = 8,5$ .

На этот раз разбиению подвергаются два множества, имеющие максимальные оценки, то есть множества  $D_2^{(3)}$  и  $D_3^{(3)}$ . Разбивая множество  $D_2^{(3)}$ , мы вводим ограничения  $x_1 \leq 3$  и  $x_1 \geq 4$ , так как первая нецелая координата точки  $B_3$   $x_1 = 3,5 \in (3; 4)$ . Разбивая множество  $D_3^{(3)}$ , вводим ограничения  $x_2 \leq 3$  и  $x_2 \geq 4$ . Получаем множества:

$$D_1^{(4)} = D_1^{(3)},$$

$$D_2^{(4)} : \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 27 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 27 \\ x_1 \leq 4, x_2 \geq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad D_3^{(4)} : \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 27 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 27 \\ x_1 \leq 4, x_2 \geq 5 \\ x_1 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$D_4^{(4)} : \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 27 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 27 \\ x_1 \geq 5, x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad D_5^{(4)} : \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 27 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 27 \\ x_1 \geq 5, x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Замечаем, что множества  $D_3^{(4)}$  и  $D_5^{(4)}$  пусты: их системы неравенств несовместны. Многоугольники, соответствующие остальным множествам, показаны на рис. 11.

Находим оценки целевой функции  $f(x)$ :

$$\xi(D_1^{(4)}) = \xi(D_1^{(3)}) = 8 \quad \text{в точке } F(4; 4),$$

$$\xi(D_2^{(4)}) = \max_{x \in A_2AB_4F_1} f(x) = 8,25 \quad \text{в точке } B_4(3; 5,25),$$

$$\xi(D_4^{(4)}) = \max_{x \in C_2CB_5F_2} f(x) = 8,25 \quad \text{в точке } B_5(5,25; 3).$$

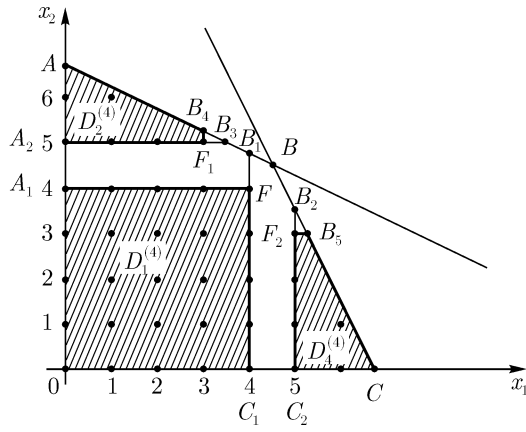


Рис. 11

Таким образом,  $\xi_4 = 8, 25$  и разбиению опять подвергаются два множества  $D_2^{(4)}$  и  $D_4^{(4)}$ . В первое из них мы добавим ограничения  $x_2 \leq 5$  и  $x_2 \geq 6$ , во второе:  $x_1 \leq 5$  и  $x_1 \geq 6$ . Получаем пять множеств:

$$D_1^{(5)} = D_1^{(4)},$$

$$D_2^{(5)}: \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 27 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 27 \\ x_1 \leq 4, x_2 \geq 5 \\ x_1 \leq 3, x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad D_3^{(5)}: \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 27 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 27 \\ x_1 \leq 4, x_2 \geq 5 \\ x_1 \leq 3, x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$D_4^{(5)}: \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 27 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 27 \\ x_1 \geq 5, x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad D_5^{(5)}: \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 27 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 27 \\ x_1 \geq 5, x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Соответствующие им многоугольники изображены на рис. 12. (Множеству  $D_2^{(5)}$  соответствует отрезок  $A_2F_1$ , множеству  $D_4^{(5)}$  — отрезок  $C_2F_2$ .)

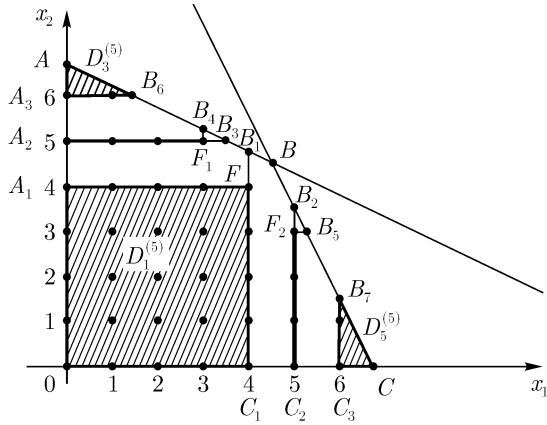


Рис. 12

Находим оценки целевой функции:

$$\begin{aligned} \xi(D_1^{(5)}) &= \xi(D_1^{(4)}) = 8 && \text{в точке } F(4; 4), \\ \xi(D_2^{(5)}) &= \max_{x \in A_2 F_1} f(x) = 8 && \text{в точке } F_1(3; 5), \\ \xi(D_3^{(5)}) &= \max_{x \in A_3 A B_6} f(x) = 7, 5 && \text{в точке } B_6(1; 5; 6), \\ \xi(D_4^{(5)}) &= \max_{x \in C_2 F_2} f(x) = 8 && \text{в точке } F_2(5; 3), \\ \xi(D_5^{(5)}) &= \max_{x \in C_3 C B_7} f(x) = 7, 5 && \text{в точке } B_7(6; 1; 5). \end{aligned}$$

Мы видим, что  $\xi_5 = 8$ , причем на сей раз мы можем указать три точки с целыми координатами, на которых целевая функция достигает своей оценки:

$$f(4, 4) = f(3, 5) = f(5, 3) = 8.$$

Это означает, что исходная задача имеет три решения:  $x^* = (4, 4)$ ,  $x^{**} = (3, 5)$  и  $x^{***} = (5, 3)$ . Процесс разбиения множеств схематически изображен на рис. 13.

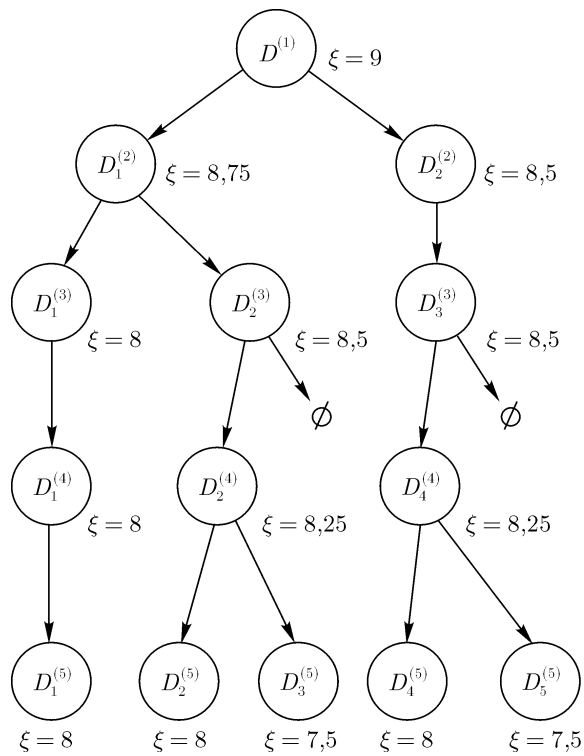


Рис. 13

### Вопросы и задания

1. Будут ли ограничения, возникающие при разбиении множеств  $D_i^{(j)}$  в ЦЗЛП, правильными отсечениями?
2. Решить задачи из задания 4 к теме «Метод Гомори» методом ветвей и границ. Убедиться, что ответы не зависят от метода решения.
3. Решить методом ветвей и границ задачу ЦЗЛП с ограничениями

$$\begin{cases} 4x + 6y \leq 60 \\ 2x - 3y \leq 0 \\ x \geq 0, y \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$



если а)  $5x + y \rightarrow \max$ , б)  $x \rightarrow \max$ .

У к а з а н и е. Если целевая функция достигает наибольшего значения в двух вершинах одновременно, то есть на одной из сторон многоугольника, то соответствующее множество  $D_i^{(j)}$  разбивается сразу на несколько подмножеств.

4. Может ли случиться так, что  $\xi_{n+1} = \xi_n$ ?

5. Как бы вы организовали нумерацию множеств  $D_i^{(j)}$ ? Какой способ обозначения вершин кажется вам наиболее рациональным? Придумайте соответствующие алгоритмы.

6. Попробуйте решить методом ветвей и границ задачу о коммивояжере: найти самый короткий маршрут, начинающийся и заканчивающийся в городе 1 и позволяющий посетить все города по одному разу. Расстояния между городами заданы в таблице:

|   | 1  | 2  | 3  | 4 | 5  |
|---|----|----|----|---|----|
| 1 | 0  | 10 | 2  | 8 | 3  |
| 2 | 10 | 0  | 15 | 1 | 2  |
| 3 | 2  | 15 | 0  | 3 | 10 |
| 4 | 8  | 1  | 3  | 0 | 6  |
| 5 | 3  | 2  | 10 | 6 | 0  |

У к а з а н и е. Выберите, в какой город вы поедете в первую очередь и оцените длину маршрута. Затем найдите наиболее «перспективный» из начатых маршрутов и выберите, какой город будет вторым по счету. Снова оцените маршруты и т. д.

7. Решите методом ветвей и границ задачи:

а)  $x + y + z \rightarrow \max$

$$\begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{3} + \frac{z}{7} \leq \frac{1}{2} \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

б)  $x + y + z + t \rightarrow \max$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{6} + \frac{z}{4} + \frac{t}{7} \leq \frac{1}{3} \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, t \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

(В последнем случае надо решить задачу, не прибегая к геометрической интерпретации.)

## Литература

- [1] Б. Банди. Основы линейного программирования. М: Радио и связь, 1989.
- [2] Коноховский. Исследование операций. С-Пб: Питер, 2000.
- [3] С. А. Ашманов. Линейное программирование. М.: Наука, 1981.
- [4] А. Кофман, А. Анри-Лабордер. Методы и модели исследования операций. М.: Мир, 1977.
- [5] А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн. Дискретное программирование. М.: Наука, 1969.