

Шуликовская В. В.

**Методы оптимизации
и исследование операций**

(Варианты индивидуальных заданий)

студентам направления
«Фундаментальная информатика и
информационные технологии»

Ижевск
2019

ББК 22.183.43р30
УДК 518.5 (075.5)

© В. В. Шуликовская, 2019

Варианты индивидуальных заданий охватывают такие темы как графическое решение задач линейного программирования, прямой и двойственный симплекс-метод, дискретное программирование, аналитические методы нелинейного программирования, динамическое программирование. Адресовано бакалаврам направления 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии». Может быть использовано при чтении курса «Исследование операций» у бакалавров направления 08.05.00 «Бизнес-информатика».

Введение

Контрольная работа по методам оптимизации и исследованию операций выполняется студентами дома, в часы, отведенные для самостоятельной работы. Она представляет собой серию индивидуальных заданий, охватывающих всю тематику практических занятий, и по уровню сложности соответствует экзаменационным задачам.

Обязательными при выполнении работы считаются следующие задания:

- задания 1-3 из работы 1;
- задание 1а из работы 2;
- задания 1-4 из работы 5.

Студент, не выполнивший обязательные задания, к экзамену не допускается. Все остальные задания являются факультативными. Их можно выполнять с таким расчетом, чтобы суммарный рейтинг, рассчитанный в соответствии с Приложением 2, составил не менее 41 балла.

Задания можно выполнять письменно, в отдельной тетради. Кроме того, для решения некоторых задач из своей контрольной работы студент может написать программу на любом языке программирования. В этом случае студент демонстрирует преподавателю, как работает написанная им программа, сдает в распечатанном виде ее код и в случае необходимости защищает написанную им программу, отвечая на вопросы преподавателя. За каждую правильно написанную и работающую программу студент получает дополнительные 10 баллов, помимо баллов, указанных в Приложении 2.

Задачи, входящие в данную работу, выполняются студентом в течение всего семестра по мере изучения материала, оформляются и сдаются преподавателю для проверки. Если какое-то из заданий решено неправильно, оно возвращается студенту для доработки.

Полностью выполненная и проверенная работа хранится у студента. Она может быть использована при повторении пройденного материала во время подготовки к экзамену или при изучении других математических дисциплин.

Варианты индивидуальных заданий

Работа 1. Геометрическая интерпретация задач линейного программирования. Каноническая задача линейного программирования.

Задание 1. Найти наибольшее значение указанных функций, изобразив на плоскости область, заданную следующими линейными ограничениями (здесь и далее значения параметров a, b, c, k, l для каждого варианта указаны в Приложении 1):

$$\begin{cases} kx + (b - l)y \leq (b - l)a, \\ (a - k)x + ly \leq (a - k)b, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{cases}$$

а) $f_1 = (a + k)x + (b + l)y$;

б) $f_2 = (a + k)x + ly$;

в) $f_3 = (a - k)x + ly$.

Как изменится ответ в последнем случае, если дополнительно потребовать $y \rightarrow \max$?

Задание 2. Следующие задачи линейного программирования решить графически.

а)

$$\begin{cases} kx + ly \rightarrow \max, \\ ax + by \geq ab, \\ (l + a)x - ly \geq -la, \\ lx - (l + b)y \leq lb, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} kx + ly \rightarrow \min, \\ ax + by \geq ab, \\ (l + a)x - ly \geq -la, \\ lx - (l + b)y \leq lb, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{cases}$$

в)

$$\begin{cases} kx + by \rightarrow \max, \\ ax + by \geq ab, \\ (l + a)x - ly \leq -la, \\ lx - (l + b)y \geq lb, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{cases}$$

г)

$$\begin{cases} ax + 2by \rightarrow \max, \\ ax + by \leq ab, \\ 2ax + by \leq 2ab, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{cases}$$

Задание 3. Изобразив в пространстве область допустимых планов, решить графически следующие задачи линейного программирования.

а)

$$\begin{cases} kx + ly + (k + 2l)z \rightarrow \max, \\ bcx + acy + abz \leq abc, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0. \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} kx + ly + (k - 2l)z \rightarrow \max, \\ acy + abz = abc, \\ bcx + abz = abc, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0. \end{cases}$$

Задание 4. Объяснить, почему задача 3б) является канонической задачей линейного программирования. Указать, в чем состоят ее первая и вторая геометрические интерпретации и какой базис соответствует каждой из вершин области допустимых планов.

Задание 5. Записать задачи линейного программирования 1а) и 2б) в канонической форме, уточнить смысл вспомогательных переменных. Указать, какой базис соответствует каждой из вершин многоугольника.

Задание 6. Записать данную задачу линейного программирования в канонической форме. Выяснить, является ли указанный базис допустимым.

Вариант 1.

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \geq -2, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_3 \geq 0, \quad x_4 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^3\}.$$

Вариант 2.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 \rightarrow \min, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 \geq -3, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 = 1, \\ x_3 \geq 0, \quad x_4 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^4\}.$$

Вариант 3.

$$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 \rightarrow \max, \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 \leq 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^4\}.$$

Вариант 4.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 \geq -10, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 2, \\ x_2 \geq 0, \quad x_3 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^2\}.$$

Вариант 5.

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 \geq 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_4 \leq 3, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^3\}.$$

Вариант 6.

$$\begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 \rightarrow \min, \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 5 \geq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^2, a^4\}.$$

Вариант 7.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + 2 \leq 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 = 3, \\ x_3 \geq 0, \quad x_4 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^2\}.$$

Вариант 8.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 5 \geq 0, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1, \\ x_3 \geq 0, \quad x_4 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^4\}.$$

Вариант 9.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \\ -4x_1 + 5x_2 \leq 29, \\ 3x_1 - x_2 \geq 14, \\ 5x_1 + 2x_2 = 38, \\ x_2 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^2\}.$$

Вариант 10.

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 10 \leq 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 3 = 0, \\ x_2 \geq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^2\}.$$

Вариант 11.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 \geq -3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_4 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^2, a^4\}.$$

Вариант 12.

$$\begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - 5 \geq 0, \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_4 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^2, a^3\}.$$

Вариант 13.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \min, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + 5 \geq 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -2, \\ x_4 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^3, a^4\}.$$

Вариант 14.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 \geq 5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_3 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^2\}.$$

Вариант 15.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 \geq 4, \\ x_2 \geq 0, \quad x_3 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^3, a^4\}.$$

Вариант 16.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ -5x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - 1 \leq 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^2\}.$$

Вариант 17.

$$\begin{cases} -5x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 9x_4 - 17 \geq 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -2, \\ x_2 \geq 0, \quad x_3 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^3\}.$$

Вариант 18.

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 \leq 5, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 7, \\ x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^4\}.$$

Вариант 19.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 4x_4 \rightarrow \min, \\ -5x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - 1 \leq 0, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = -5, \\ x_1 \leq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^2, a^3\}.$$

Вариант 20.

$$\begin{cases} 2(x_1 + x_3 - x_4) \rightarrow \max, \\ -(x_1 + 10x_2 - x_4) - 2 \geq 0, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 9 = 0, \\ x_1 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^2, a^4\}.$$

Вариант 21.

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 - 11 \leq 0, \\ 2x_1 + 1x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 1 = 0, \\ x_2 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^3, a^4\}.$$

Вариант 22.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 - 6 \leq 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 3 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \quad x_3 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^2\}.$$

Вариант 23.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 - 2x_4 \rightarrow \min, \\ -x_1 - 10x_2 + x_4 \geq 2, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 9 = 0, \\ x_1 \leq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^3\}.$$

Вариант 24.

$$\begin{cases} -(9x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 + 11x_2 - x_4 \leq 3, \\ -5(x_2 + x_3 - 9x_4) + 10 = 0, \\ x_2 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^4\}.$$

Вариант 25.

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 - 5x_4 \rightarrow \min, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 22 \leq 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2 = 0, \\ x_2 \geq 0, \quad x_4 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^2, a^3\}.$$

Вариант 26.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 - 8 \leq 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^2, a^4\}.$$

Вариант 27.

$$\begin{cases} -9x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 + 11x_2 - x_4 \geq -3, \\ -5x_2 - 5x_3 + 45x_4 + 10 = 0, \\ x_2 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^3, a^4\}.$$

Вариант 28.

$$\begin{cases} 12x_1 + x_2 + 7x_3 + 11x_4 \rightarrow \max, \\ 24x_1 + 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 5 \leq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \geq 3, \\ x_1 \geq 0, \quad x_3 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^2\}.$$

Вариант 29.

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 11 \leq 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 - 5 = 0, \\ x_2 \geq 0, \quad x_4 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^3\}.$$

Вариант 30.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 7x_4 + 12 \leq 0, \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 6x_4 \geq 16, \\ x_2 \geq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^4\}.$$

Работа 2. Симплекс-метод линейного программирования.

Задание 1.

а) Решить задачу 1а) из работы 1 симплекс-методом. Убедиться, что ответ не зависит от метода решения задачи. По последней симплекс-таблице вновь записать задачу в канонической форме, но уже для нового базиса, и объяснить, почему найденное значение целевой функции действительно максимально.

б) Решить задачу 2а) из работы 1 симплекс-методом, для чего предварительно найти начальный допустимый базис путем подбора и преобразовать задачу к виду, допускающему непосредственную запись симплекс-таблицы.

в) Решить симплекс-методом задачу 2б) из работы 1. Как связаны между собой первоначальные симплекс-таблицы в задачах 2а) и 2б), если первоначальные базисы в них совпадают?

г) Решить симплекс-методом задачу 1в) из работы 1. В чем разница между ответом, полученным с помощью симплекс-метода, и ответом, найденным графически?

д) Решить симплекс-методом задачу 3а) из работы 1.

Задание 2. Решить данную задачу линейного программирования симплекс-методом, взяв в качестве начального указанный базис. (Предварительно убедиться, что указанный базис допустим.)

Вариант 1.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 \rightarrow \max, & \beta = \{a^1, a^2\}. \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 5, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 6, & (f^* = 8 \frac{2}{3}) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 2.

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 \rightarrow \max, & \beta = \{a^1, a^2\}. \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 5, \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 7, & (f^* \rightarrow +\infty) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 3.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow \max, & \beta = \{a^2, a^5\}. \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 5, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad (f^* = -3/2)$$

Вариант 4.

$$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 \rightarrow \max, & \beta = \{a^2, a^3\}. \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 - x_5 = 9, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad (f^* = -7, 5)$$

Вариант 5.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \rightarrow \max, & \beta = \{a^2, a^4\}. \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 6, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad (f^* = -7)$$

Вариант 6.

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 \rightarrow \max, & \beta = \{a^1, a^2\}. \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 7, \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_4 - 6x_5 = 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad (f^* = -2)$$

Вариант 7.

$$\begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 \rightarrow \max, & \beta = \{a^1, a^5\}. \\ 21x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 2x_5 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad (f^* = 5 \quad 4/23)$$

Вариант 8.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 \rightarrow \max, & \beta = \{a^2, a^3\}. \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 9, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 - x_5 = 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad (f^* \rightarrow +\infty)$$

Вариант 9.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 \rightarrow \max, & \beta = \{a^1, a^4\}. \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 6, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad (f^* = 11)$$

Вариант 10.

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \rightarrow \max, & \beta = \{a^1, a^4\}. \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 6, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad (f^* = 14)$$

Вариант 11.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 \rightarrow \max, & \beta = \{a^3, a^4\}. \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 9, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad (f^* = 3)$$

Вариант 12.

$$\begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 \rightarrow \max, & \beta = \{a^1, a^5\}. \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 7, \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 - 13x_5 = 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad (f^* = 20)$$

Вариант 13.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow \max, & \beta = \{a^1, a^5\}. \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad (f^* \rightarrow +\infty)$$

Вариант 14.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \begin{aligned} \beta &= \{a^1, a^3\}. \\ (f^* &= 5) \end{aligned}$$

Вариант 15.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow \max, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \begin{aligned} \beta &= \{a^1, a^3\}. \\ (f^* &= -1) \end{aligned}$$

Вариант 16.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 8x_3 + x_4 + 2x_5 \rightarrow \max, \\ -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 7x_5 = 5, \\ 11x_1 + x_2 - 12x_3 - 5x_4 + 34x_5 = 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \begin{aligned} \beta &= \{a^1, a^2\}. \\ (f^* &= 8 \quad 2/3) \end{aligned}$$

Вариант 17.

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 \rightarrow \max, \\ -3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 5, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \begin{aligned} \beta &= \{a^1, a^2\}. \\ (f^* &\rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

Вариант 18.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 10x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \max, \\ 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 2x_4 - x_5 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 12x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \begin{aligned} \beta &= \{a^2, a^5\}. \\ (f^* &= -3/2) \end{aligned}$$

Вариант 19.

$$\begin{cases} 6x_1 + 21x_2 - 9x_3 - 3x_4 - 12x_5 \rightarrow \max, \\ -4x_1 - 14x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 5, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 9, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \begin{aligned} \beta &= \{a^2, a^3\}. \\ (f^* &= -7, 5) \end{aligned}$$

Вариант 20.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \rightarrow \max, & \beta = \{a^2, a^4\}. \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 6, \\ 4x_1 - 5x_2 - 4x_3 + 19x_4 - x_5 = 5, & (f^* = -7) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 21.

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 \rightarrow \max, & \beta = \{a^1, a^2\}. \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 7, \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_4 - 6x_5 = 5, & (f^* = -2) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 22.

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 + 12x_5 \rightarrow \max, & \beta = \{a^1, a^5\}. \\ -2x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 + 21x_5 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 5, & (f^* = 5 \quad 4/23) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 23.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 \rightarrow \max, & \beta = \{a^2, a^3\}. \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - 5x_5 = 9, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 6x_4 - x_5 = 5, & (f^* \rightarrow +\infty) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 24.

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 \rightarrow \max, & \beta = \{a^1, a^4\}. \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 6, \\ 4x_1 + 16x_2 - 6x_3 + x_4 + 7x_5 = 7, & (f^* = 11) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 25.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 \rightarrow \max, & \beta = \{a^1, a^4\}. \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 6, \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad (f^* = 14)$$

Вариант 26.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 12x_3 - x_4 - x_5 \rightarrow \max, & \beta = \{a^3, a^4\}. \\ 2x_1 - 2x_2 - 10x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad (f^* = 1)$$

Вариант 27.

$$\begin{cases} x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 + 7x_5 \rightarrow \max, & \beta = \{a^1, a^5\}. \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 7, \\ -13x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad (f^* = 20)$$

Вариант 28.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \max, & \beta = \{a^1, a^5\}. \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 7, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad (f^* \rightarrow +\infty)$$

Вариант 29.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 \rightarrow \max, & \beta = \{a^1, a^3\}. \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 9, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad (f^* = 5)$$

Вариант 30.

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow \max, & \beta = \{a^1, a^3\}. \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 7, \\ 5x_1 - 2x_2 + 1x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad (f^* = -1)$$

Задание 3. Решить данные задачи линейного программирования симплекс-методом, предварительно решив вспомогательную задачу по выбору первоначального допустимого базиса.

а)

Вариант 1.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 - 5x_2 + 11x_3 - 2x_4 = 14, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 2.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 7x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 34x_4 = 24, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 16x_4 = 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 3.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 4x_4 = 6, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 4.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 - 2x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 10x_2 - 12x_3 + 3x_4 = 12, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 5.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 5, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 6.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 9, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 11, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 7.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 9x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 2, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 8.

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 9, \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 14, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 9.

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 10.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 11.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 12.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 13.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 12, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 14.

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 \rightarrow \max, \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 15.

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 \rightarrow \max, \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 16.

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 \rightarrow \max, \\ -2x_1 + 11x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 14, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 17.

$$\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 \rightarrow \max, \\ 34x_1 + 12x_2 + 11x_3 + x_4 = 24, \\ 16x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 18.

$$\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 + x_3 + 3x_4 \rightarrow \max, \\ 4x_1 + 12x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 6, \\ 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 19.

$$\begin{cases} -2x_1 - 8x_2 + x_3 + 3x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 - 12x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 12, \\ -6x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 20.

$$\begin{cases} 9x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5, \\ 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 21.

$$\begin{cases} 9x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 9, \\ 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 22.

$$\begin{cases} -9x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 23.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 9, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 14, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 24.

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 25.

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 2, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 26.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 3, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 27.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ -x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 28.

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 29.

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 3, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 30.

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

б) Задача 2в) из работы 1.

Задание 4. Решить данную задачу линейного программирования двойственным симплекс-методом.

$$\begin{cases} kx + ly \rightarrow \min, \\ ax + by \geq ab, \\ (l + a)x - ly \geq la, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Задание 5. а) Пусть в задаче из задания 1а) добавили новое условие:

$$ax + by \leq ab.$$

Решить возникающую задачу линейного программирования, воспользовавшись двойственным симплекс-методом.

б) Пусть в той же задаче компоненты вектора ограничений изменили свои значения на $(b - 2l)a$ и $(a - 2k)b$ соответственно. Выяснить, как это повлияет на вид оптимального плана.

в) Пусть в той же задаче коэффициенты целевой функции изменили свои значения:

$$\hat{f}_1 = (a - k)x + (b - l)y.$$

Выяснить, изменится ли оптимальный план.

г) В каких пределах могут изменяться коэффициенты целевой функции, чтобы оптимальный базис содержал те же самые переменные?

Работа 3. Теория двойственности.

Задание 1. Записать задачи, двойственные к данным задачам линейного программирования. В первом случае записать двойственную задачу двумя способами и сравнить ответы.

а)

$$\begin{cases} kx + ly \rightarrow \min, \\ (a + k)x + (b - l)y \leq kl, \\ lx + ky \leq a + b, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

б)

Вариант 1.

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 \geq -2, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 2.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 \rightarrow \min, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 \geq -3, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 = 1, \\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 3.

$$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 \rightarrow \max, \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 \leq 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 4.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 \geq -10, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 2, \\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 5.

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5 \geq 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_4 \leq 3. \end{cases}$$

Вариант 6.

$$\begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 \rightarrow \min, \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 5 \geq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 7.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + 2 \leq 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 = 3, \\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 8.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 5 \geq 0, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1, \\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 9.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \\ -4x_1 + 5x_2 \geq 29, \\ 3x_1 - x_2 \leq 14, \\ 5x_1 + 2x_2 = 38, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 10.

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 10 \leq 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 3 = 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 11.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 \geq -3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 12.

$$\begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - 5 \geq 0, \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 13.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + 5 \geq 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -2, \\ x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 14.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 \geq 5, \\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 15.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 \geq 4, \\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 16.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ -5x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - 1 \leq 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 17.

$$\begin{cases} -5x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 9x_4 - 17 \geq 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -2, \\ x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 18.

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 \leq 5, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 7, \\ x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 19.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 4x_4 \rightarrow \min, \\ -5x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - 1 \leq 0, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = -5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 20.

$$\begin{cases} 2(x_1 + x_3 - x_4) \rightarrow \max, \\ -(x_1 + 10x_2 - x_4) - 2 \geq 0, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 9 = 0, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 21.

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 - 11 \leq 0, \\ 2x_1 + 1x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 1 = 0, \\ x_2 \geq 0, \quad x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 22.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 - 6 \leq 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 3 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 23.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 - 2x_4 \rightarrow \min, \\ -x_1 - 10x_2 + x_4 \geq 2, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 9 = 0, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 24.

$$\begin{cases} -(9x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 + 11x_2 - x_4 \leq 3, \\ -5(x_2 + x_3 - 9x_4) + 10 = 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 25.

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 - 5x_4 \rightarrow \min, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 22 \leq 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2 = 0, \\ x_2 \geq 0, \quad x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 26.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 - 8 \leq 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 27.

$$\begin{cases} -9x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 + 11x_2 - x_4 \geq -3, \\ -5x_2 - 5x_3 + 45x_4 + 10 = 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 28.

$$\begin{cases} 12x_1 + x_2 + 7x_3 + 11x_4 \rightarrow \max, \\ 24x_1 + 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 5 \leq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \geq 3, \\ x_1 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 29.

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 11 \leq 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 - 5 = 0, \\ x_2 \geq 0, \quad x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 30.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 7x_4 + 12 \leq 0, \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 6x_4 \geq 16, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задание 2. Для задач 1, 2а), 2в), 2г), 3а) работы 1 записать двойственные задачи и решить их графически. Сравнить ответы и проверить выполнение теорем двойственности.

Задание 3. Записать задачу, двойственную к задаче 1а) работы 1, после чего решить ее (двойственным) симплекс-методом. Сравнить возникающие при этом симплекс-таблицы с симплекс-таблицами из задания 1а) работы 2.

Работа 4. Дискретное программирование.

Задание 1. В задаче 1а) из Работы 1 сделать замену переменных

$$x = x_1 + \frac{1}{2}; \quad y = y_1 + \frac{1}{2}.$$

а) Как изменится область допустимых планов и оптимальное значение целевой функции?

б) Добавить в получившуюся у Вас задачу условие целочисленности и решить возникшую задачу целочисленного линейного программирования методом ветвей и границ.

в) Решить ту же самую задачу методом Гомори (достаточно выполнить две итерации). Сравнить ответы.

Задание 2. В задаче 3а) из Работы 1 сделать замену переменных

$$x = x_1 + \frac{1}{3}; \quad y = y_1 + \frac{1}{3}; \quad z = z_1 + \frac{1}{3}.$$

а) Как изменится область допустимых планов и оптимальное значение целевой функции?

б) Добавить в получившуюся у Вас задачу условие целочисленности и решить возникшую задачу целочисленного линейного программирования методом ветвей и границ.

в) Решить ту же самую задачу методом Гомори. Сравнить ответы.

Задание 3. Решить задачу о назначениях с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} k & a+k & b+k & c+k & ab+k \\ l & a+l & b+l & c+l & ac+l \\ k+l & a+k+l & b+k+l & c+k+l & bc+k+l \\ a-k & ab-k & ac-k & bc-k & abc-k \\ a-l & ab-l & ac-l & bc-l & abc-l \end{pmatrix}.$$

Работа 5. Нелинейное программирование.

Задание 1. Решить данную задачу безусловной оптимизации.

$$f(x, y) = 2x^2 + by^2 - 2(ab + c)xy - 2(a + c)x - 2(c + b)y \rightarrow \text{extr}.$$

Задание 2. Убедиться, что точка (a, b, c) является подозрительной на экстремум для функции

$$f(x, y, z) = a(x - a)^2 + b(y - b)^2 + c(z - c)^2 + (x - a)(y - b)(z - c).$$

Составив матрицу вторых производных, выяснить, как ведет себя функция $f(x, y, z)$ в окрестности данной точки.

Задание 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y)$ из задания 1 в области, заданной неравенствами

$$\begin{cases} ax + by \leq akl, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{cases}$$

Задание 4. Решить задачу условной оптимизации методом Лагранжа. Предварительно объяснить, почему условие типа неравенства в данной задаче следует заменить на условие типа равенства, а условия неотрицательности при поиске **наибольшего** значения целевой функции можно опустить.

Вариант 1.

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3^3} \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 100, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 2.

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1 \cdot x_2^3 \cdot x_3^2} \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 110, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 3.

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3^3} \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 120, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 4.

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1^2 \cdot x_2^3 \cdot x_3} \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 90, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 5.

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1^3 \cdot x_2 \cdot x_3^2} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 180, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 6.

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1^3 \cdot x_2^2 \cdot x_3} \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 150, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 7.

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1^4 \cdot x_2 \cdot x_3} \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 140, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 8.

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1 \cdot x_2^4 \cdot x_3} \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 50, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 9.

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3^4} \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 60, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 10.

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \leq 150, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 11.

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3^3 \cdot x_4} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 30, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 12.

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1 \cdot x_2^3 \cdot x_3^2} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 80, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 13.

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3^3} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 100, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 14.

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1^2 \cdot x_2^3 \cdot x_3} \rightarrow \max, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 90, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 15.

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1^3 \cdot x_2 \cdot x_3^2} \rightarrow \max, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 100, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 16.

$$\begin{cases} \sqrt[5]{x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2} \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 100, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 17.

$$\begin{cases} \sqrt[5]{x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3^2} \rightarrow \max, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 90, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 18.

$$\begin{cases} \sqrt[5]{x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 110, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 19.

$$\begin{cases} \sqrt[5]{x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 120, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 20.

$$\begin{cases} \sqrt[5]{x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3^2} \rightarrow \max, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 80, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 21.

$$\begin{cases} \sqrt[5]{x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2} \rightarrow \max, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 90, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 22.

$$\begin{cases} \sqrt[7]{x_1^4 \cdot x_2^2 \cdot x_3} \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 100, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 23.

$$\begin{cases} \sqrt[7]{x_1^4 \cdot x_2 \cdot x_3^2} \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 50, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 24.

$$\begin{cases} \sqrt[7]{x_1 \cdot x_2^4 \cdot x_3^2} \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 60, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 25.

$$\begin{cases} \sqrt[7]{x_1^2 \cdot x_2^4 \cdot x_3} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 150, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 26.

$$\begin{cases} \sqrt[7]{x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3^4} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 30, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 27.

$$\begin{cases} \sqrt[7]{x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3^4} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 80, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 28.

$$\begin{cases} \sqrt[7]{x_1^3 \cdot x_2^3 \cdot x_3} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 100, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 29.

$$\begin{cases} \sqrt[7]{x_1^3 \cdot x_2 \cdot x_3^3} \rightarrow \max, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 90, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 30.

$$\begin{cases} \sqrt[7]{x_1 \cdot x_2^3 \cdot x_3^3} \rightarrow \max, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 100, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Работа 6. Динамическое программирование.

Задание 1. Решите задачу 4 из работы 5 методом динамического программирования, используя метод

- а) прямой прогонки;
- б) обратной прогонки.

Сравните получившиеся у вас ответы.

Задание 2. Решить данную задачу условной оптимизации методом динамического программирования, если значения функций $f_i(x_i)$ заданы следующей таблицей.

x_i	f_1	f_2	f_3	f_4
0	-5	10	3	1
1	-4	9	4	-1
2	-3	8	5	-2
3	-2	7	3	-1
4	-1	6	4	0
5	0	5	5	1
6	1	4	3	2
7	2	3	4	3
8	3	2	5	2
9	4	1	6	1
10	5	0	5	0
> 10	6	-1	4	-2

Вариант 1.

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 \cdot x_2 + kx_3 + lx_4 = 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вариант 2.

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 \cdot x_2 + kx_3 + lx_4 = 15, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 1, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вариант 3.

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 \cdot x_2 + kx_3 + lx_4 = 16, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 1, x_4 \geq 1, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вариант 4.

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 \cdot x_2 + kx_3 + lx_4 = 18, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 2, x_4 \geq 2, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вариант 5.

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 \cdot x_2 + kx_3 + lx_4 = 20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 2, x_4 \geq 2, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вариант 6.

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + lx_4 = 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вариант 7.

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + lx_4 = 15, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 1, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вариант 8.

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + lx_4 = 16, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 1, x_4 \geq 1, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вариант 9.

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + lx_4 = 18, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 2, x_4 \geq 2, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вариант 10.

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + lx_4 = 20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 2, x_4 \geq 2, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вариант 11.

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ kx_1 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вариант 12.

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ kx_1 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 15, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 1, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вариант 13.

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ kx_1 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 16, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 1, x_4 \geq 1, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вариант 14.

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ kx_1 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 18, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 2, x_4 \geq 2, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вариант 15.

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ kx_1 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 2, x_4 \geq 2, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вариант 16.

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ kx_1 + lx_2 + x_3 \cdot x_4 = 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вариант 17.

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ kx_1 + lx_2 + x_3 \cdot x_4 = 15, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 1, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вариант 18.

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ kx_1 + lx_2 + x_3 \cdot x_4 = 16, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 1, x_4 \geq 1, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вариант 19.

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ kx_1 + lx_2 + x_3 \cdot x_4 = 18, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 2, x_4 \geq 2, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вариант 20.

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ kx_1 + lx_2 + x_3 \cdot x_4 = 20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 2, x_4 \geq 2, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вариант 21.

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ (kx_1 + lx_2 + x_3) \cdot x_4 = 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вариант 22.

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ (kx_1 + lx_2 + x_3) \cdot x_4 = 15, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 1, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вариант 23.

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ (kx_1 + lx_2 + x_3) \cdot x_4 = 16, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 1, x_4 \geq 1, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вариант 24.

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ (kx_1 + lx_2 + x_3) \cdot x_4 = 18, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 2, x_4 \geq 2, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вариант 25.

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ (kx_1 + lx_2 + x_3) \cdot x_4 = 20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 2, x_4 \geq 2, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вариант 26.

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вариант 27.

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 15, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 1, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вариант 28.

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 16, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 1, x_4 \geq 1, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вариант 29.

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 18, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 2, x_4 \geq 2, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вариант 30.

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 2, x_4 \geq 2, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Задание 3. Решите методом динамического программирования задачу о найме работников при следующих условиях:

1) В начале рассматриваемого периода сотрудников на фирме не было.

2) Оптимальное количество сотрудников в течение следующих трех месяцев составляет $m_1 = a$; $m_2 = b$; $m_3 = c$ человек соответственно. В конце периода количество сотрудников может быть любым.

3) Прием на работу одного сотрудника обходится руководству фирмы в bc денежных единиц, увольнение — в $b + l$ денежных единиц.

4) Присутствие на работе одного лишнего сотрудника обходится руководству фирмы в $a + k$ денежных единиц в течение месяца, нехватка одного сотрудника — в ab денежных единиц в течение месяца.

Приложение 1. Значения параметров

Вариант	a	b	c	k	l
01	2	3	3	1	1
02	2	4	4	1	1
03	2	5	5	1	2
04	2	6	3	1	2
05	2	7	4	1	3
06	3	2	2	1	1
07	3	4	1	1	1
08	3	5	4	1	2
09	3	6	5	1	2
10	3	7	6	1	3
11	4	2	5	1	1
12	4	3	4	2	1
13	4	5	3	2	2
14	4	6	2	2	2
15	4	7	1	2	3
16	5	2	2	2	1
17	5	3	3	2	1
18	5	4	4	2	2
19	5	6	5	2	2
20	5	7	6	2	3
21	6	2	5	1	1
22	6	3	4	2	1
23	6	4	3	1	2
24	6	5	2	2	2
25	6	7	1	1	3
26	7	2	2	2	1
27	7	3	3	1	1
28	7	4	4	2	2
29	7	5	5	1	2
30	7	6	4	2	3

Приложение 2. Баллы

Номер задания	Баллы	Замечания
Работа 1. Задание 1	1 балл	За каждый пункт (а, б, в)
Работа 1. Задание 2	1 балл	За каждый пункт (а, б, в, г)
Работа 1. Задание 3	1 балл	За каждый пункт (а, б)
Работа 1. Задание 4	2 балла	
Работа 1. Задание 5	3 балла	За каждую задачу
Работа 1. Задание 6	1 балл	
Работа 2. Задание 1	4 балла	За каждую задачу
Работа 2. Задание 2	4 балла	
Работа 2. Задание 3а	6 баллов	
Работа 2. Задание 3б	3 балла	
Работа 2. Задание 4	4 балла	
Работа 2. Задание 5	2 балла	За каждый пункт (а, б, в, г)
Работа 3. Задание 1	2 балла	За каждый пункт (а, б)
Работа 3. Задание 2	3 балла	За каждую задачу
Работа 3. Задание 3	4 балла	
Работа 4. Задание 1а	1 балл	
Работа 4. Задание 1б	4 балла	
Работа 4. Задание 1в	4 балла	
Работа 4. Задание 2а	1 балл	
Работа 4. Задание 2б	4 балла	
Работа 4. Задание 2в	4 балла	
Работа 4. Задание 3	4 балла	
Работа 5. Задание 1	1 балл	
Работа 5. Задание 2	2 балла	
Работа 5. Задание 3	2 балла	
Работа 5. Задание 4	2 балла	
Работа 5. Задание 5	2 балла	
Работа 6. Задание 1а	5 баллов	
Работа 6. Задание 1б	5 баллов	
Работа 6. Задание 2	5 баллов	
Работа 6. Задание 3	5 баллов	