

**Шуликовская В. В.**

## **Исследование операций**

**Линейное программирование. Нелинейное  
программирование.  
(Варианты индивидуальных заданий)**

студентам направления  
«Бизнес-информатика»

Ижевск  
2016

ББК 22.183.43р30  
УДК 518.5 (075.5)

© В. В. Шуликовская, 2016

Варианты индивидуальных заданий охватывают такие темы как графическое решение задач линейного программирования, прямой и двойственный симплекс-метод, аналитические методы нелинейного программирования. Адресовано бакалаврам направления «Бизнес-информатика».

## Работа 1. Геометрическая интерпретация задач линейного программирования. Каноническая задача линейного программирования.

**Задание 1.** Найти наибольшее значение указанных функций, изобразив на плоскости область, заданную следующими линейными ограничениями:

$$\begin{cases} kx + (b-l)y \leq (b-l)a, \\ (a-k)x + ly \leq (a-k)b, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{cases}$$

а)  $f_1 = (a+k)x + (b+l)y;$

б)  $f_2 = (a+k)x + ly;$

в)  $f_3 = (a-k)x + ly.$

Как изменится ответ в последнем случае, если дополнительно потребовать  $y \rightarrow \max$ ?

**Задание 2.** Следующие задачи линейного программирования решить графически.

а)

$$\begin{cases} kx + ly \rightarrow \max, \\ ax + by \geq ab, \\ (l+a)x - ly \geq -la, \\ lx - (l+b)y \leq lb, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} kx + ly \rightarrow \min, \\ ax + by \geq ab, \\ (l+a)x - ly \geq -la, \\ lx - (l+b)y \leq lb, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{cases}$$

в)

$$\begin{cases} kx + by \rightarrow \max, \\ ax + by \geq ab, \\ (l+a)x - ly \leq -la, \\ lx - (l+b)y \geq lb, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{cases}$$

г)

$$\begin{cases} ax + 2by \rightarrow \max, \\ ax + by \leq ab, \\ 2ax + by \leq 2ab, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{cases}$$

**Задание 3.** Изобразив в пространстве область допустимых планов, решить графически следующие задачи линейного программирования.

а)

$$\begin{cases} kx + ly + (k + 2l)z \rightarrow \max, \\ bcx + acy + abz \leq abc, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0. \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} kx + ly + (k - 2l)z \rightarrow \max, \\ acy + abz = abc, \\ bcx + abz = abc, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0. \end{cases}$$

**Задание 4.** Объяснить, почему задача 3б) является канонической задачей линейного программирования. Указать, в чем состоят ее первая и вторая геометрические интерпретации и какой базис соответствует каждой из вершин области допустимых планов.

**Задание 5.** Записать задачи линейного программирования 1а) и 2б) в канонической форме, уточнить смысл вспомогательных переменных. Указать, какой базис соответствует каждой из вершин многоугольника.

**Задание 6.** Записать данную задачу линейного программирования в канонической форме. Выяснить, является ли указанный базис допустимым.

**Вариант 1.**

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \geq -2, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_3 \geq 0, \quad x_4 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^3\}.$$

**Вариант 2.**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 \rightarrow \min, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 \geq -3, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 = 1, \\ x_3 \geq 0, \quad x_4 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^4\}.$$

**Вариант 3.**

$$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 \rightarrow \max, \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 \leq 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^4\}.$$

**Вариант 4.**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 \geq -10, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 2, \\ x_2 \geq 0, \quad x_3 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^2\}.$$

**Вариант 5.**

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 \geq 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_4 \leq 3, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^3\}.$$

**Вариант 6.**

$$\begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 \rightarrow \min, \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 5 \geq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^2, a^4\}.$$

**Вариант 7.**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + 2 \leq 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 = 3, \\ x_3 \geq 0, \quad x_4 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^2\}.$$

**Вариант 8.**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 5 \geq 0, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1, \\ x_3 \geq 0, \quad x_4 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^4\}.$$

**Вариант 9.**

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \\ -4x_1 + 5x_2 \leq 29, \\ 3x_1 - x_2 \geq 14, \\ 5x_1 + 2x_2 = 38, \\ x_2 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^2\}.$$

**Вариант 10.**

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 10 \leq 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 3 = 0, \\ x_2 \geq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^2\}.$$

**Вариант 11.**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 \geq -3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_4 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^2, a^4\}.$$

**Вариант 12.**

$$\begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - 5 \geq 0, \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_4 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^2, a^3\}.$$

**Вариант 13.**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \min, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + 5 \geq 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -2, \\ x_4 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^3, a^4\}.$$

**Вариант 14.**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 \geq 5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_3 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^2\}.$$

**Вариант 15.**

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 \geq 4, \\ x_2 \geq 0, \quad x_3 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^3, a^4\}.$$

**Вариант 16.**

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ -5x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - 1 \leq 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^2\}.$$

**Вариант 17.**

$$\begin{cases} -5x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 9x_4 - 17 \geq 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -2, \\ x_2 \geq 0, \quad x_3 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^3\}.$$

**Вариант 18.**

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 \leq 5, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 7, \\ x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^4\}.$$

**Вариант 19.**

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 4x_4 \rightarrow \min, \\ -5x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - 1 \leq 0, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = -5, \\ x_1 \leq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^2, a^3\}.$$

**Вариант 20.**

$$\begin{cases} 2(x_1 + x_3 - x_4) \rightarrow \max, \\ -(x_1 + 10x_2 - x_4) - 2 \geq 0, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 9 = 0, \\ x_1 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^2, a^4\}.$$

**Вариант 21.**

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 - 11 \leq 0, \\ 2x_1 + 1x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 1 = 0, \\ x_2 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^3, a^4\}.$$

**Вариант 22.**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 - 6 \leq 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 3 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \quad x_3 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^2\}.$$

**Вариант 23.**

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 - 2x_4 \rightarrow \min, \\ -x_1 - 10x_2 + x_4 \geq 2, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 9 = 0, \\ x_1 \leq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^3\}.$$

**Вариант 24.**

$$\begin{cases} -(9x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 + 11x_2 - x_4 \leq 3, \\ -5(x_2 + x_3 - 9x_4) + 10 = 0, \\ x_2 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^4\}.$$

**Вариант 25.**

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 - 5x_4 \rightarrow \min, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 22 \leq 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2 = 0, \\ x_2 \geq 0, \quad x_4 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^2, a^3\}.$$



**Вариант 26.**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 - 8 \leq 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^2, a^4\}.$$

**Вариант 27.**

$$\begin{cases} -9x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 + 11x_2 - x_4 \geq -3, \\ -5x_2 - 5x_3 + 45x_4 + 10 = 0, \\ x_2 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^3, a^4\}.$$

**Вариант 28.**

$$\begin{cases} 12x_1 + x_2 + 7x_3 + 11x_4 \rightarrow \max, \\ 24x_1 + 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 5 \leq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \geq 3, \\ x_1 \geq 0, \quad x_3 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^2\}.$$

**Вариант 29.**

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 11 \leq 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 - 5 = 0, \\ x_2 \geq 0, \quad x_4 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^3\}.$$

**Вариант 30.**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 7x_4 + 12 \leq 0, \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 6x_4 \geq 16, \\ x_2 \geq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^4\}.$$

## Работа 2. Симплекс-метод линейного программирования.

**Задание 1.** Решить задачи 1а), 2а), 2б) из работы 1 симплекс-методом. (В случае необходимости найти начальный допустимый базис путем подбора.) Убедиться, что ответ не зависит от метода решения задачи. Решить симплекс-методом задачу 1в) из работы 1. Сравнить ответы.

**Задание 2.** Решить данную задачу линейного программирования симплекс-методом, взяв в качестве начального указанного базис. (Предварительно убедиться, что базис допустим.)

### Вариант 1.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 5, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

$$\beta = \{a^1, a^2\}. \quad (f^* = 8 \quad 2/3).$$

### Вариант 2.

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 \rightarrow \max, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 5, \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

$$\beta = \{a^1, a^2\}. \quad (f^* \rightarrow +\infty).$$

### Вариант 3.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow \max, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 5, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

$$\beta = \{a^2, a^5\}. \quad (f^* = -3/2).$$

**Вариант 4.**

$$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 \rightarrow \max, \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 - x_5 = 9, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

$$\beta = \{a^2, a^3\}. \quad (f^* = -7, 5).$$

**Вариант 5.**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \rightarrow \max, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 6, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

$$\beta = \{a^2, a^4\}. \quad (f^* = -7).$$

**Вариант 6.**

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 \rightarrow \max, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 7, \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_4 - 6x_5 = 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

$$\beta = \{a^1, a^2\}. \quad (f^* = -2).$$

**Вариант 7.**

$$\begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 \rightarrow \max, \\ 21x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 2x_5 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

$$\beta = \{a^1, a^5\}. \quad (f^* = 5 \quad 4/23).$$

**Вариант 8.**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 9, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 - x_5 = 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

$$\beta = \{a^2, a^3\}. \quad (f^* \rightarrow +\infty).$$

**Вариант 9.**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 \rightarrow \max, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 6, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

$$\beta = \{a^1, a^4\}. \quad (f^* = 11).$$

**Вариант 10.**

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \rightarrow \max, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 6, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

$$\beta = \{a^1, a^4\}. \quad (f^* = 14).$$

**Вариант 11.**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 9, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

$$\beta = \{a^3, a^4\}. \quad (f^* = 1).$$

**Вариант 12.**

$$\begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 \rightarrow \max, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 7, \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 - 13x_5 = 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

$$\beta = \{a^1, a^5\}. \quad (f^* = 20).$$

**Вариант 13.**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

$$\beta = \{a^1, a^5\}. \quad (f^* \rightarrow +\infty).$$

**Вариант 14.**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

$$\beta = \{a^1, a^3\}. \quad (f^* = 5).$$

**Вариант 15.**

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow \max, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

$$\beta = \{a^1, a^3\}. \quad (f^* = -1).$$

**Вариант 16.**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 8x_3 + x_4 + 2x_5 \rightarrow \max, \\ -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 7x_5 = 5, \\ 11x_1 + x_2 - 12x_3 - 5x_4 + 34x_5 = 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

$$\beta = \{a^1, a^2\}. \quad (f^* = 8 \quad 2/3).$$

**Вариант 17.**

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 \rightarrow \max, \\ -3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 5, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

$$\beta = \{a^1, a^2\}. \quad (f^* \rightarrow +\infty).$$

**Вариант 18.**

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 10x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \max, \\ 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 2x_4 - x_5 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 12x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

$$\beta = \{a^2, a^5\}. \quad (f^* = -3/2).$$

**Вариант 19.**

$$\begin{cases} 6x_1 + 21x_2 - 9x_3 - 3x_4 - 12x_5 \rightarrow \max, \\ -4x_1 - 14x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 5, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 9, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

$$\beta = \{a^2, a^3\}. \quad (f^* = -7, 5).$$

**Вариант 20.**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \rightarrow \max, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 6, \\ 4x_1 - 5x_2 - 4x_3 + 19x_4 - x_5 = 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

$$\beta = \{a^2, a^4\}. \quad (f^* = -7).$$

**Вариант 21.**

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 \rightarrow \max, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 7, \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_4 - 6x_5 = 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

$$\beta = \{a^1, a^2\}. \quad (f^* = -2).$$

**Вариант 22.**

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 + 12x_5 \rightarrow \max, \\ -2x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 + 21x_5 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

$$\beta = \{a^1, a^5\}. \quad (f^* = 5 \quad 4/23).$$

**Вариант 23.**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - 5x_5 = 9, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 6x_4 - x_5 = 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

$$\beta = \{a^2, a^3\}. \quad (f^* \rightarrow +\infty).$$

**Вариант 24.**

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 \rightarrow \max, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 6, \\ 4x_1 + 16x_2 - 6x_3 + x_4 + 7x_5 = 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

$$\beta = \{a^1, a^4\}. \quad (f^* = 11).$$

**Вариант 25.**

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 \rightarrow \max, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 6, \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

$$\beta = \{a^1, a^4\}. \quad (f^* = 14).$$

**Вариант 26.**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 12x_3 - x_4 - x_5 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - 2x_2 - 10x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

$$\beta = \{a^3, a^4\}. \quad (f^* = 1).$$

**Вариант 27.**

$$\begin{cases} x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 + 7x_5 \rightarrow \max, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 7, \\ -13x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

$$\beta = \{a^1, a^5\}. \quad (f^* = 20).$$

**Вариант 28.**

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \max, \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 7, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

$$\beta = \{a^1, a^5\}. \quad (f^* \rightarrow +\infty).$$

**Вариант 29.**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 \rightarrow \max, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 9, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

$$\beta = \{a^1, a^3\}. \quad (f^* = 5).$$

**Вариант 30.**

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 7, \\ 5x_1 - 2x_2 + 1x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

$$\beta = \{a^1, a^3\}. \quad (f^* = -1).$$

**Задание 3.** Решить данные задачи линейного программирования симплекс-методом, предварительно решив вспомогательную задачу по выбору базиса.

а)

**Вариант 1.**

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 - 5x_2 + 11x_3 - 2x_4 = 14, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 2.**

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 7x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 34x_4 = 24, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 16x_4 = 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$



**Вариант 3.**

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 4x_4 = 6, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 4.**

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 - 2x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 10x_2 - 12x_3 + 3x_4 = 12, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 5.**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 5, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 6.**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 9, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 11, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 7.**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 9x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 2, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 8.**

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 9, \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 14, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 9.**

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 10.**

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 11.**

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 12.**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 13.**

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 12, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 14.**

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 \rightarrow \max, \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 15.**

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 \rightarrow \max, \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 16.**

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 \rightarrow \max, \\ -2x_1 + 11x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 14, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 17.**

$$\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 \rightarrow \max, \\ 34x_1 + 12x_2 + 11x_3 + x_4 = 24, \\ 16x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 18.**

$$\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 + x_3 + 3x_4 \rightarrow \max, \\ 4x_1 + 12x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 6, \\ 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 19.**

$$\begin{cases} -2x_1 - 8x_2 + x_3 + 3x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 - 12x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 12, \\ -6x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 20.**

$$\begin{cases} 9x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5, \\ 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 21.**

$$\begin{cases} 9x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 9, \\ 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 22.**

$$\begin{cases} -9x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 23.**

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 9, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 14, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 24.**

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 25.**

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 2, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 26.**

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 3, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 27.**

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ -x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 28.**

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 29.**

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 3, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 30.**

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

б) Задача 2в) из работы 1.

**Задание 4.** Решить данную задачу линейного программирования двойственным симплекс-методом.

$$\begin{cases} kx + ly \rightarrow \min, \\ ax + by \geq ab, \\ (l + a)x - ly \geq la, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{cases}$$

**Задание 5.** а) Пусть в задаче из задания 1а) добавили новое условие:

$$ax + by \leq ab.$$

Решить возникающую задачу линейного программирования, воспользовавшись двойственным симплекс-методом.

б) Пусть в задаче из задания 1а) коэффициенты целевой функции изменили свои значения:

$$f'_1 = (a - k)x + (b - l)y.$$

Выяснить, изменится ли оптимальный план.

в) Пусть в задаче из задания 1в) компоненты вектора ограничений изменили свои значения на  $(b - 2l)a$  и  $(a - 2k)b$  соответственно. Выяснить, как это повлияет на вид оптимального плана.

г) Пусть в задаче из задания 1в) 1-ый коэффициент целевой функции изменяет свое значение. В каких пределах он может изменяться, чтобы это не повлияло на вид оптимального плана?

### Работа 3. Теория двойственности.

**Задание 1.** Записать задачи, двойственные к данным задачам линейного программирования. В первом случае записать двойственную задачу двумя способами и сравнить ответы.

а)

$$\begin{cases} kx + ly \rightarrow \min, \\ (a + k)x + (b - l)y \leq kl, \\ lx + ky \leq a + b, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

б)

**Вариант 1.**

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 \geq -2, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 2.**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 \rightarrow \min, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 \geq -3, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 = 1, \\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 3.**

$$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 \rightarrow \max, \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 \leq 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 4.**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 \geq -10, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 2, \\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 5.**

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5 \geq 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_4 \leq 3. \end{cases}$$

**Вариант 6.**

$$\begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 \rightarrow \min, \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 5 \geq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 7.**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + 2 \leq 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 = 3, \\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 8.**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 5 \geq 0, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1, \\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 9.**

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \\ -4x_1 + 5x_2 \geq 29, \\ 3x_1 - x_2 \leq 14, \\ 5x_1 + 2x_2 = 38, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 10.**

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 10 \leq 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 3 = 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$



**Вариант 11.**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 \geq -3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 12.**

$$\begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - 5 \geq 0, \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 13.**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + 5 \geq 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -2, \\ x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 14.**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 \geq 5, \\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 15.**

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 \geq 4, \\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 16.**

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ -5x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - 1 \leq 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 17.**

$$\begin{cases} -5x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 9x_4 - 17 \geq 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -2, \\ x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 18.**

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 \leq 5, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 7, \\ x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 19.**

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 4x_4 \rightarrow \min, \\ -5x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - 1 \leq 0, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = -5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 20.**

$$\begin{cases} 2(x_1 + x_3 - x_4) \rightarrow \max, \\ -(x_1 + 10x_2 - x_4) - 2 \geq 0, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 9 = 0, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 21.**

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 - 11 \leq 0, \\ 2x_1 + 1x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 1 = 0, \\ x_2 \geq 0, \quad x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 22.**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 - 6 \leq 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 3 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 23.**

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 - 2x_4 \rightarrow \min, \\ -x_1 - 10x_2 + x_4 \geq 2, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 9 = 0, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 24.**

$$\begin{cases} -(9x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 + 11x_2 - x_4 \leq 3, \\ -5(x_2 + x_3 - 9x_4) + 10 = 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 25.**

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 - 5x_4 \rightarrow \min, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 22 \leq 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2 = 0, \\ x_2 \geq 0, \quad x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 26.**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 - 8 \leq 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 27.**

$$\begin{cases} -9x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 + 11x_2 - x_4 \geq -3, \\ -5x_2 - 5x_3 + 45x_4 + 10 = 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 28.**

$$\begin{cases} 12x_1 + x_2 + 7x_3 + 11x_4 \rightarrow \max, \\ 24x_1 + 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 5 \leq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \geq 3, \\ x_1 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 29.**

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 11 \leq 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 - 5 = 0, \\ x_2 \geq 0, \quad x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 30.**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 7x_4 + 12 \leq 0, \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 6x_4 \geq 16, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

**Задание 2.** Для задач 1, 2а), 2в), 2г), 3а) работы 1 записать двойственные задачи и решить их графически. Сравнить ответы и проверить выполнение теорем двойственности.

## Работа 4. Нелинейное программирование.

**Задание 1.** Решить данную задачу безусловной оптимизации.

$$f(x, y) = 2x^2 + by^2 - 2(ab + c)xy - 2(a + c)x - 2(c + b)y \rightarrow \text{extr}.$$

**Задание 2.** Убедиться, что точка  $(a, b, c)$  является подозрительной на экстремум для функции

$$f(x, y, z) = a(x - a)^2 + b(y - b)^2 + c(z - c)^2 + (x - a)(y - b)(z - c).$$

Составив матрицу вторых производных, выяснить, как ведет себя функция  $f(x, y, z)$  в окрестности данной точки.

**Задание 3.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x, y)$  из задания 1 в области, заданной неравенствами

$$\begin{cases} ax + by \leq akl, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{cases}$$

**Задание 4.** Решить задачу потребительского выбора методом Лагранжа.

**Вариант 1.**

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3^3} \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 100, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 2.**

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1 \cdot x_2^3 \cdot x_3^2} \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 110, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 3.**

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3^3} \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 120, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 4.**

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1^2 \cdot x_2^3 \cdot x_3} \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 90, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 5.**

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1^3 \cdot x_2 \cdot x_3^2} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 180, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 6.**

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1^3 \cdot x_2^2 \cdot x_3} \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 150, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 7.**

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1^4 \cdot x_2 \cdot x_3} \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 140, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 8.**

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1 \cdot x_2^4 \cdot x_3} \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 50, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 9.**

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3^4} \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 60, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 10.**

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \leq 150, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 11.**

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3^3 \cdot x_4} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 30, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 12.**

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1 \cdot x_2^3 \cdot x_3^2} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 80, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 13.**

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3^3} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 100, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 14.**

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1^2 \cdot x_2^3 \cdot x_3} \rightarrow \max, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 90, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 15.**

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1^3 \cdot x_2 \cdot x_3^2} \rightarrow \max, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 100, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 16.**

$$\begin{cases} \sqrt[5]{x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2} \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 100, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 17.**

$$\begin{cases} \sqrt[5]{x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3^2} \rightarrow \max, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 90, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 18.**

$$\begin{cases} \sqrt[5]{x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 110, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 19.**

$$\begin{cases} \sqrt[5]{x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 120, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 20.**

$$\begin{cases} \sqrt[5]{x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3^2} \rightarrow \max, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 80, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 21.**

$$\begin{cases} \sqrt[5]{x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2} \rightarrow \max, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 90, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 22.**

$$\begin{cases} \sqrt[7]{x_1^4 \cdot x_2^2 \cdot x_3} \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 100, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 23.**

$$\begin{cases} \sqrt[7]{x_1^4 \cdot x_2 \cdot x_3^2} \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 50, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 24.**

$$\begin{cases} \sqrt[7]{x_1 \cdot x_2^4 \cdot x_3^2} \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 60, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$



**Вариант 25.**

$$\begin{cases} \sqrt[7]{x_1^2 \cdot x_2^4 \cdot x_3} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 150, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 26.**

$$\begin{cases} \sqrt[7]{x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3^4} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 30, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 27.**

$$\begin{cases} \sqrt[7]{x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3^4} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 80, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 28.**

$$\begin{cases} \sqrt[7]{x_1^3 \cdot x_2^3 \cdot x_3} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 100, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 29.**

$$\begin{cases} \sqrt[7]{x_1^3 \cdot x_2 \cdot x_3^3} \rightarrow \max, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 90, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 30.**

$$\begin{cases} \sqrt[7]{x_1 \cdot x_2^3 \cdot x_3^3} \rightarrow \max, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 100, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Задание 5.** Решить данную задачу о планировании производства, используя условия Куна-Таккера.

$$\begin{cases} \Pi(x, y) = -2x^2 - by^2 + 2(ab + c)xy - 2(a + c)x - 2(c + b)y \rightarrow \max, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{cases}$$

**Приложение 1. Значения параметров**

Вариант	$a$	$b$	$c$	$k$	$l$
<b>01</b>	2	3	3	1	1
<b>02</b>	2	4	4	1	1
<b>03</b>	2	5	5	1	2
<b>04</b>	2	6	3	1	2
<b>05</b>	2	7	4	1	3
<b>06</b>	3	2	2	1	1
<b>07</b>	3	4	1	1	1
<b>08</b>	3	5	4	1	2
<b>09</b>	3	6	5	1	2
<b>10</b>	3	7	6	1	3
<b>11</b>	4	2	5	1	1
<b>12</b>	4	3	4	2	1
<b>13</b>	4	5	3	2	2
<b>14</b>	4	6	2	2	2
<b>15</b>	4	7	1	2	3
<b>16</b>	5	2	2	2	1
<b>17</b>	5	3	3	2	1
<b>18</b>	5	4	4	2	2
<b>19</b>	5	6	5	2	2
<b>20</b>	5	7	6	2	3
<b>21</b>	6	2	5	1	1
<b>22</b>	6	3	4	2	1
<b>23</b>	6	4	3	1	2
<b>24</b>	6	5	2	2	2
<b>25</b>	6	7	1	1	3
<b>26</b>	7	2	2	2	1
<b>27</b>	7	3	3	1	1
<b>28</b>	7	4	4	2	2
<b>29</b>	7	5	5	1	2
<b>30</b>	7	6	4	2	3

## Приложение 2. Баллы

Номер задания	Баллы	Замечания
Работа 1. Задание 1	1 балл	За каждый пункт (а, б, в)
Работа 1. Задание 2	1 балл	За каждый пункт (а, б, в, г)
Работа 1. Задание 3	1 балл	За каждый пункт (а, б)
Работа 1. Задание 4	2 балла	Факультативное задание
Работа 1. Задание 5	3 балла	Факультативное задание
Работа 1. Задание 6	1 балл	
Работа 2. Задание 1	4 балла	За каждую задачу
Работа 2. Задание 2	4 балла	
Работа 2. Задание 3а	6 баллов	Факультативное задание
Работа 2. Задание 3б	3 балла	
Работа 2. Задание 4	4 балла	
Работа 2. Задание 5	2 балла	За каждый пункт (а, б, в, г)
Работа 3. Задание 1	2 балла	За каждый пункт (а, б)
Работа 3. Задание 2	3 балла	За каждую задачу
Работа 4. Задание 1	1 балл	
Работа 4. Задание 2	2 балла	
Работа 4. Задание 3	2 балла	
Работа 4. Задание 4	2 балла	
Работа 4. Задание 5	2 балла	Факультативное задание